THEME 8 :

ANGLES ET PARALLELISME
ANGLES ALTERNES-INTERNES
ANGLES CORRESPONDANTS

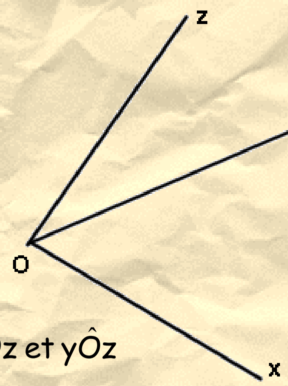
Angles adjacents

<u>Adjacent</u> : (adjectif) Voisin, attenant ; *Des terres adjacentes.*
(Dictionnaire Le Petit Larousse Illustré)

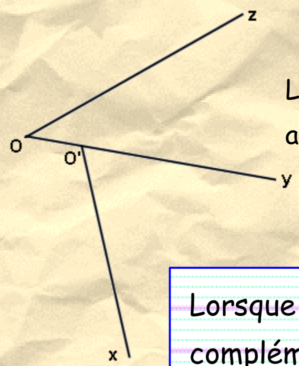
Définition :
Deux angles sont adjacents s'ils ont
- le même sommet
- un côté commun
- ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun

Autre façon d'exprimer cette définition :
Deux angles sont adjacents s'ils ont, en commun, leur sommet et un côté et rien de plus.

Les angles $x\hat{O}y$ et $y\hat{O}z$ sont adjacents.



Par contre les angles $x\hat{O}z$ et $y\hat{O}z$ ne sont pas adjacents



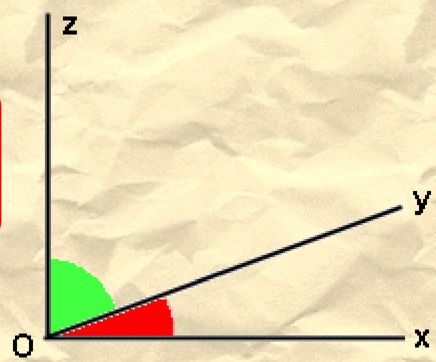
Les angles $x\hat{O'}y$ et $y\hat{O}z$ ne sont pas adjacents. (sommet différent)

Lorsque deux angles $x\hat{O}y$ et $y\hat{O}z$ sont complémentaires, nous avons :
$$x\hat{O}z = x\hat{O}y + y\hat{O}z$$

Angles complémentaires

Définition :
Deux angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures est égale à 90° .

Très souvent, il est dit que le **complément de 40°** est 50° (obtenu en effectuant l'opération 90 – 40)

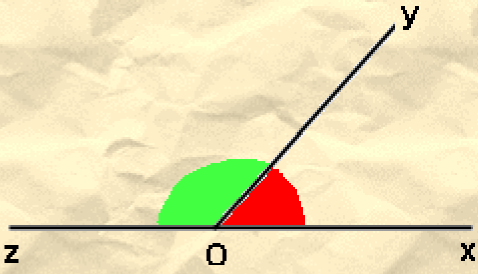


Angles supplémentaires

Définition :

Deux angles sont supplémentaires si la somme de leurs mesures est égale à 180° .

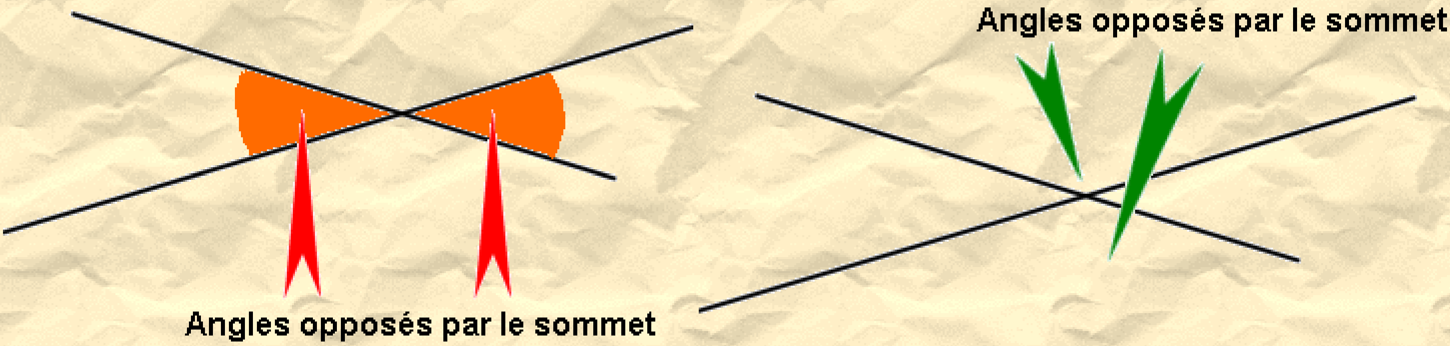
Très souvent, il est dit que le **complément de 40°** est 140°
(obtenu en effectuant l'opération 180 – 40)



Angles opposés par le sommet

Définition :

Deux angles opposés par le sommet sont les angles déterminés par deux droites sécantes.



Propriété :

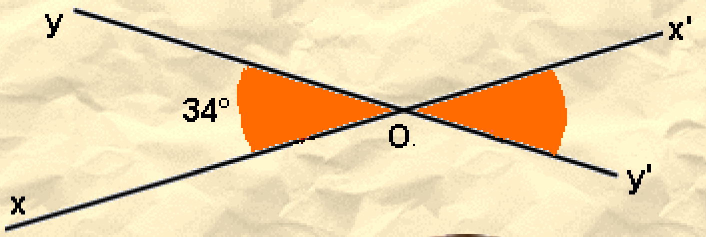
Deux angles opposés par le sommet ont même mesure.

<u>Exemple :</u>

Quelle est la mesure de l'angle $x'\hat{O}y'$?

Les angles $x\hat{O}y$ et $x'\hat{O}y'$ sont opposés par le sommet.
Par conséquent, nous avons :

$$x'\hat{O}y' = x\hat{O}y = 34°$$



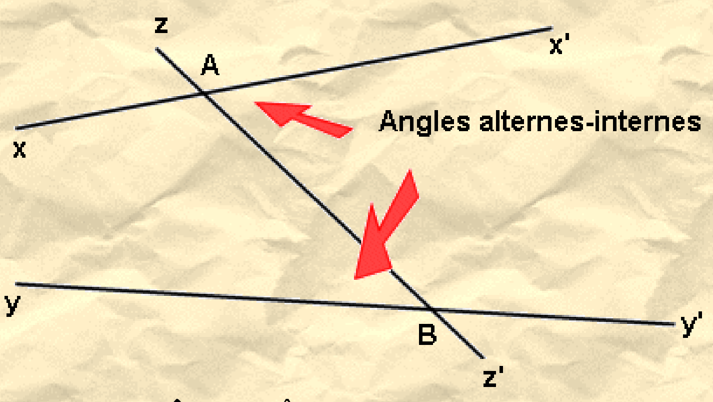
Ne pas confondre angles opposés par le sommet et angles opposés.

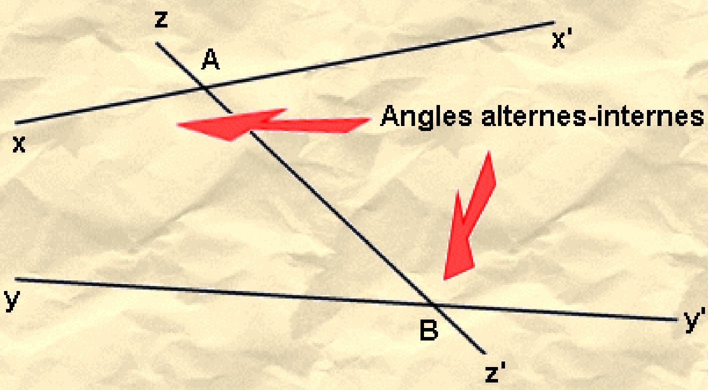
Dans un quadrilatère ABCD, les angles $D\hat{A}C$ et $B\hat{C}D$ sont opposés, mais pas opposés par le sommet.

EUCLIDE

ANGLES ET PARALLELES

Angles alternes-internes :





Les angles $x'\hat{A}z'$ et $y\hat{B}z$ sont des angles alternes-internes.

De même , les angles $x\hat{A}z'$ et $z\hat{B}y'$ sont des angles alternes-internes.

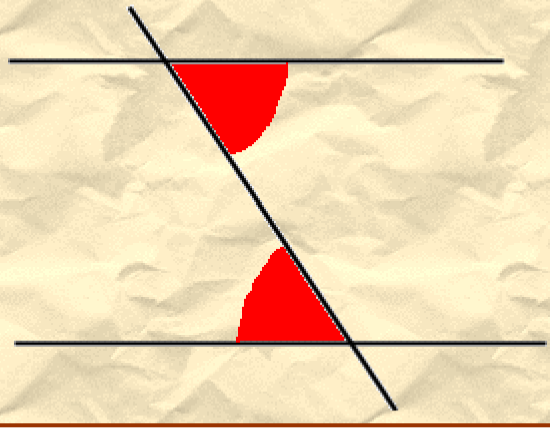
Remarque :

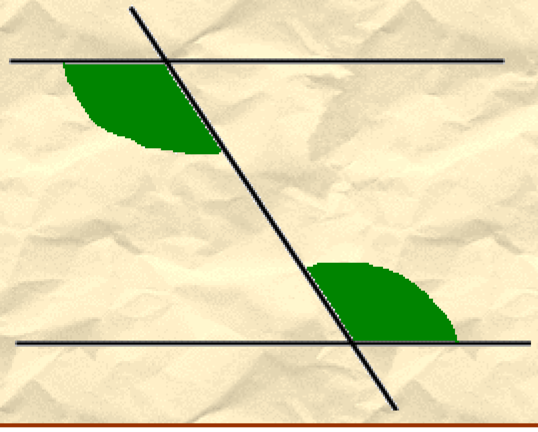
Pour pouvoir qualifier deux angles d'angles alternes-internes, il faut deux droites et une sécante à ces deux droites.

Pour repérer des angles alternes-internes, il suffit de considérer deux angles situés de part et d'autre de la sécante (d'où l'adjectif « alterne ») et à l'intérieur des deux droites (d'où l'adjectif « interne »).

Propriété 1 :

Si deux droites sont parallèles, les angles alternes-internes formés par ces deux droites et une sécante ont même mesure.





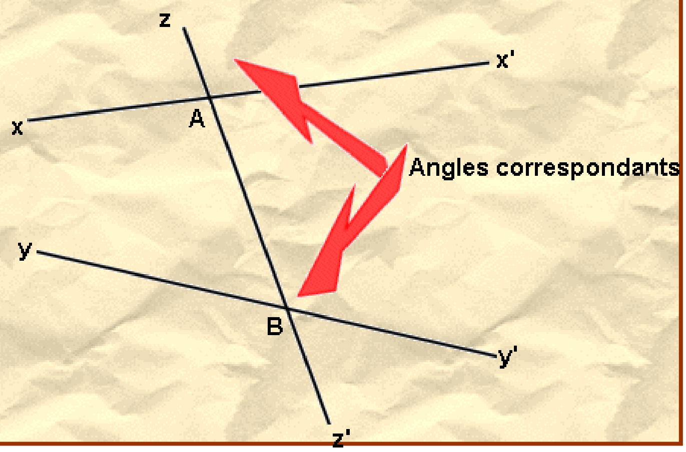
Angles correspondants :

Les angles $z\hat{A}x'$ et $z\hat{B}y'$ sont des **angles correspondants**.

Les angles $z\hat{A}x$ et $z\hat{B}y$ sont des **angles correspondants**.

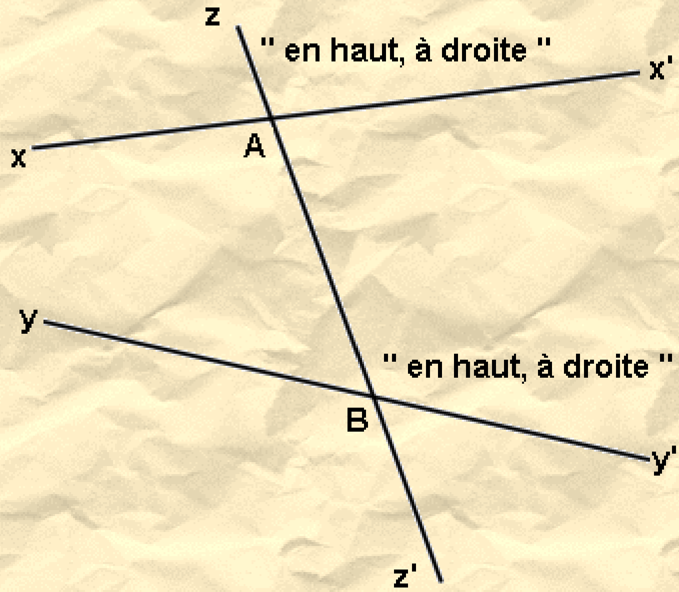
De même , les angles $x\hat{A}z'$ et $y\hat{B}z'$ sont des **angles correspondants**.

De même , les angles $x'\hat{A}z'$ et $y'\hat{B}z'$ sont des **angles correspondants**.



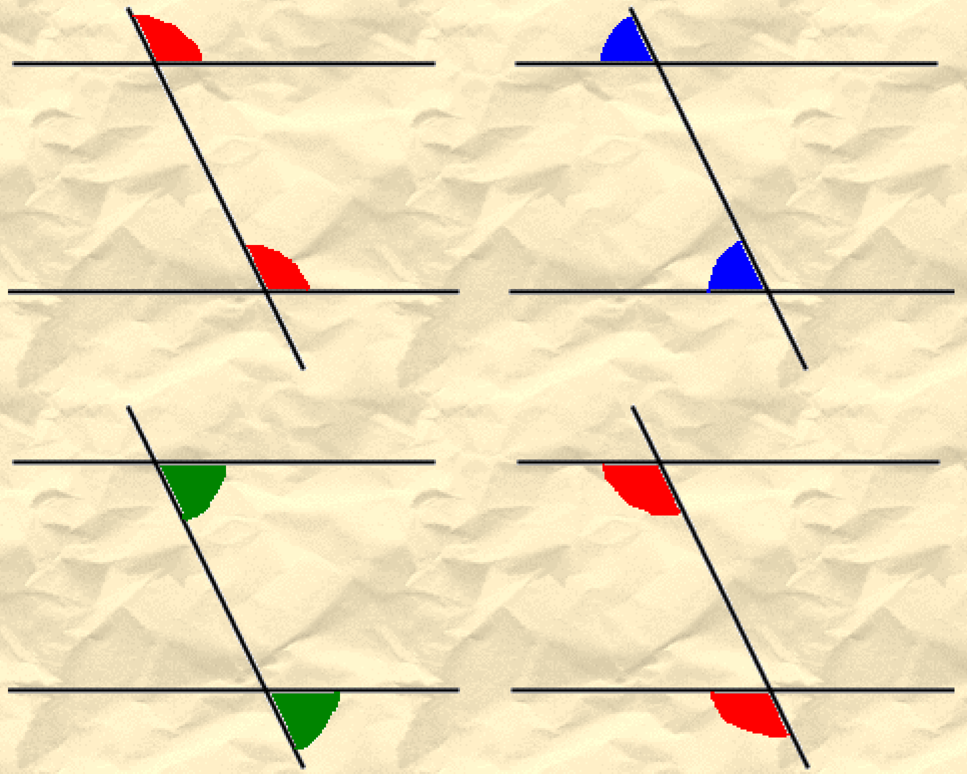
<u>Remarque :</u>

Pour pouvoir qualifier deux angles d'angles correspondants, il faut deux droites et une sécante à ces deux droites.
Pour repérer des angles correspondants, il suffit de considérer des angles situés à la «même place », c'est à dire à des places correspondantes.
Par exemple l'angle $z\hat{A}x'$, situé pour la droite (xx'), «en haut et à droite» , est <u>correspondant</u> avec l'angle $z\hat{B}y'$ (que nous pouvons également nommé $A\hat{B}y'$) situé, pour la droite (yy'), «en haut et à droite» .

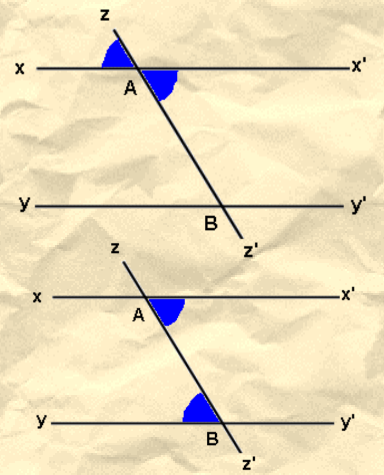


Propriété 2 :

Si deux droites sont <u>parallèles</u>, les angles correspondants formés par ces deux droites et une sécante ont même mesure.

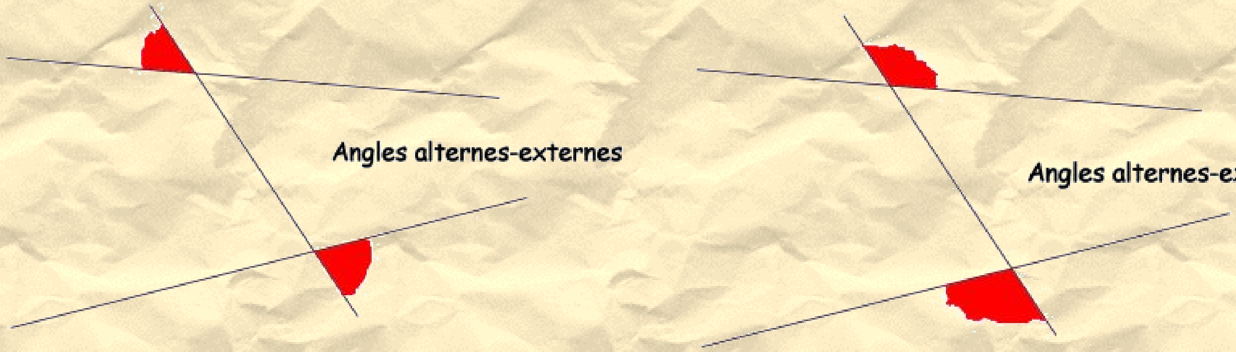


Démonstration de cette propriété :



Les angles $x\hat{A}z$ et $z'\hat{A}x'$ sont des angles opposés par le sommet.
Donc $\qquad x\hat{A}z = z'\hat{A}x' \quad (1)$
Les droites (xx') et (yy') sont parallèles. Donc les angles $z'\hat{A}x'$ et $y\hat{B}z$, en situation d'angles alternes internes, ont même mesure.
Donc $\qquad z'\hat{A}x' = y\hat{B}z \quad (2)$
Les deux égalités (1) et (2) permettent donc d'écrire : $\boxed{x\hat{A}z = y\hat{B}z}$
Nous venons de démontrer que ces deux angles correspondants ont même mesure.

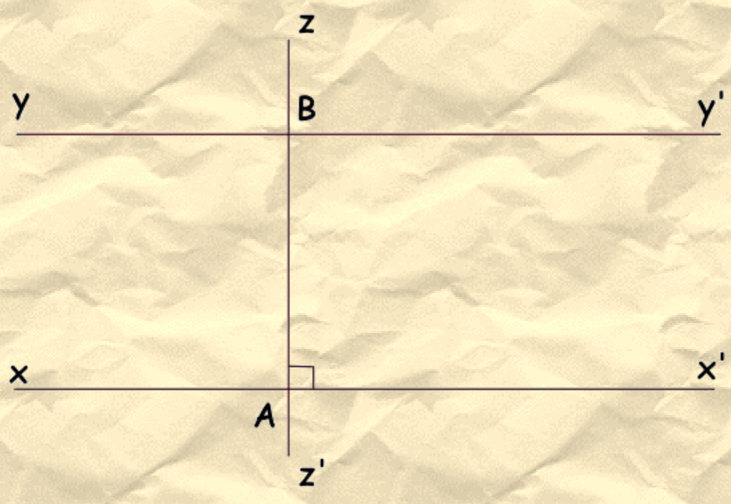
Remarque 1 : Angles alternes-externes (hors programme)
Il existe une autre notion : les angles alternes-externes.
Pour repérer des angles alternes-externes, il suffit de considérer deux angles situés de part et d'autre de la sécante (d'où l'adjectif « alterne ») et cette fois-ci à l'extérieur des deux droites (d'où l'adjectif « externe »).



Nous avons également la propriété suivante (à ne pas utiliser dans les exercices puisque cette notion n'est pas au programme) :

Si deux droites sont parallèles, les angles alternes-externes formés par ces deux droites et une sécante ont même mesure.

Remarque 2 : Cas particulier (les deux angles alternes-internes ont pour valeur 90°)



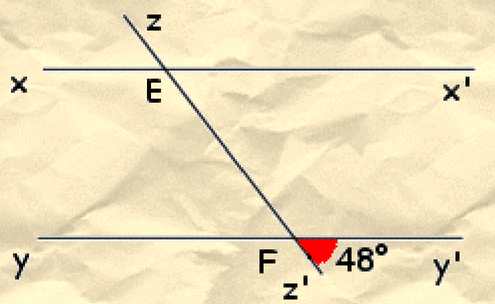
Les deux droites (xx') et (yy') sont parallèles.
Les angles $x'\hat{A}B$ et $y\hat{B}A$ sont des angles alternes-internes.
Donc (puisque les droites sont parallèles) , ces deux angles sont égaux.

$$x'\hat{A}B = y\hat{B}A$$

Comme $x'\hat{A}B$ est un angle droit, l'angle $y\hat{B}A$ est également un angle droit.
Les droites (yy') et v(zz') sont donc parallèles.

Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

► Rédaction d'un exercice :



Les droites (xx') et (yy') sont parallèles.
Déterminer la mesure de l'angle $x\hat{E}F$.

Correction :

▷ Calcul de l'angle $y'\hat{F}E$:

Les angles $y'\hat{F}E$ et $z'\hat{F}y'$ sont supplémentaires.

Donc : $y'\hat{F}E = 180 - z'\hat{F}y' = 180 - 48 = 132°$

A ne pas oublier

▷ Calcul de l'angle $x\hat{E}F$:

- Les droites (xx') et (yy') sont parallèles
- Les angles $x\hat{E}F$ et $y'\hat{F}E$ sont alternes-internes.

Donc $x\hat{E}F = y'\hat{F}E = 132°$

Remarque importante :

Deux angles alternes-internes (ou correspondants) n'ont pas (toujours) même mesure.

Par contre deux angles alternes-internes (ou correspondants) ont même mesure uniquement si … les droites sont parallèles.

Dans la démonstration ci-dessus, il ne faut surtout pas oublier la première condition (droites parallèles).

Remarque : Notion de réciproque :

Un théorème (ou une propriété) est une phrase vraie (démontrée) qui s'énonce toujours, après avoir précisé les objets utilisés :

Si ……………………………………………, alors ……………………………………………

Par exemple, nous connaissons le théorème suivant :

Si un nombre entier se termine par 5 , alors ce nombre est divisible par 5.

La première phrase (la première proposition) s'appelle l'hypothèse et la seconde phrase (la deuxième proposition) s'appelle la conclusion.

Un théorème est donc une écriture démontrée du type :

(Objets mathématiques utilisés)

Si $\underbrace{\text{.......... ....}}_{\text{Hypothèse(s)}}$ .., alors $\underbrace{\text{.......... ....}}_{\text{Conclusion(s)}}$

Le théorème ci-contre peut également s'exprimer sans suivre la construction Si…., alors … .

Il peut, par exemple, s'énoncer ainsi :

« Un nombre qui se termine par 5 est divisible par 5 ».

Lorsque cette écriture est démontrée et donc est qualifiée de théorème, nous pouvons chercher si la réciproque de ce théorème est vraie.

La réciproque s'obtient en intervertissant Hypothèse(s) et Conclusion(s).

(Objets mathématiques utilisés)

Si $\underbrace{\text{.......... ....}}_{\text{Conclusion(s)}}$, alors $\underbrace{\text{.......... ....}}_{\text{Hypothèse(s)}}$ ..

Attention, <u>la réciproque d'un théorème n'est pas nécessairement vraie</u>, c'est à dire que cette réciproque ne devient pas nécessairement une nouvelle propriété, un nouveau théorème.
Si nous reprenons le théorème énoncé précédemment :

Si un nombre entier se termine par 5 , alors ce nombre est divisible par 5.

la réciproque devient :

Si un nombre entier est divisible par 5 , alors ce nombre se termine par 5.

Un simple <u>contre-exemple</u> permet d'affirmer que cette phrase est fausse.
Par exemple le nombre 10 est divisible par 5 , mais ne se termine pas par 5 !!! (Voir ci-contre)
Donc la réciproque du théorème énoncé est fausse.

Cet unique exemple permet d'affirmer que la phrase proposée est fausse. Un tel exemple (qui permet de contredire la « propriété ») s'appelle un <u>contre-exemple</u>. Retenons que des exemples, même nombreux, ne constituent pas une preuve, mais un contre-exemple est une preuve.

Remarquons que la réciproque de la réciproque d'une propriété est la propriété elle-même !

Revenons aux angles.

▶ La propriété 1 étudiée est la suivante :
Si deux droites sont parallèles alors les angles alternes-internes formés par ces deux droites et une sécante ont même mesure.
La réciproque de cette propriété (de ce théorème) est :

Si les deux angles alternes-internes formés par deux droites et une sécante ont même mesure alors ces deux droites sont parallèles.

Cette réciproque est vraie (sans démonstration pour l'instant) et devient une nouvelle propriété, un nouveau théorème.

Propriété 3 : (Réciproque de la propriété 1)

Si deux angles alternes-internes formés par deux droites et une sécante sont de même mesure alors ces deux droites sont parallèles.

▶ De même, la propriété 2 étudiée est la suivante :
Si deux droites sont parallèles alors les angles correspondants formés par ces deux droites et une sécante ont même mesure.
La réciproque de cette propriété (de ce théorème) est :

Si les deux angles correspondants formés par deux droites et une sécante ont même mesure alors ces deux droites sont parallèles.

Cette réciproque est vraie (sans démonstration pour l'instant) et devient une nouvelle propriété, un nouveau théorème.

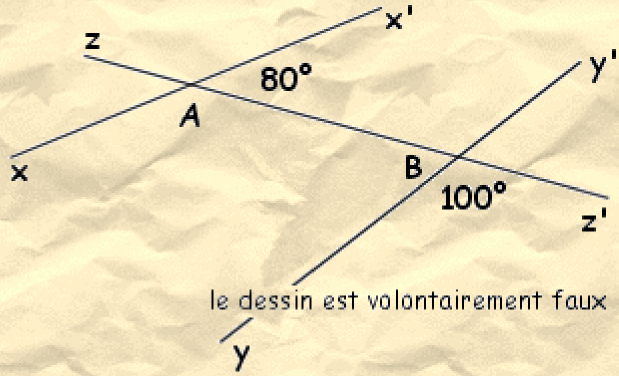
Propriété 4 : (Réciproque de la propriété 2)

Si deux angles correspondants formés par deux droites et une sécante sont de même mesure alors ces deux droites sont parallèles.

Remarque :

Les deux premières propriétés (Propriété 1 et Propriété 2) permettent de déterminer la mesure de certains angles (Voir exercice corrigé).
Par contre les deux dernières propriétés (Propriété 3 et Propriété 4) permettent de démontrer que des droites sont parallèles.

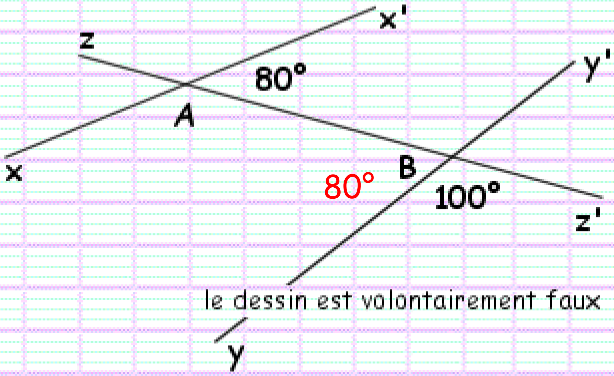
▶ Rédaction d'un exercice :



Les droites (xx') et (yy') sont-elles parallèles ?

Correction :

▶ *Méthode 1 :* Avec les angles alternes-internes



▷ Calcul de l'angle $A\hat{B}y$:

Les angles $A\hat{B}y$ et $y\hat{B}z'$ sont des angles supplémentaires.

donc $A\hat{B}y = 180 - y\hat{B}z' = 180 - 100 = 80°$

▷ Les droites (xx') et (yy') sont-elles parallèles ?

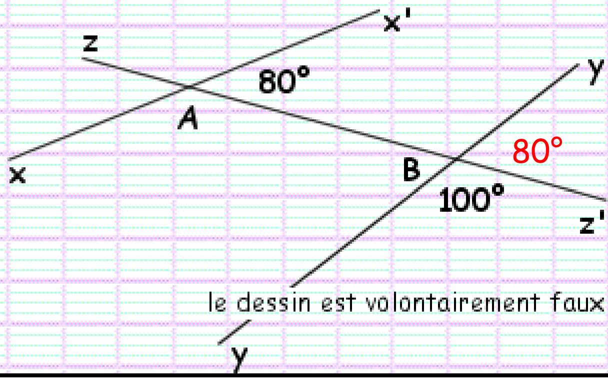
- Les angles $x'\hat{A}B$ et $A\hat{B}y$ sont des angles alternes-internes.
- De plus, ces deux angles ont même mesure : $x'\hat{A}B = A\hat{B}y = 80°$

Donc (propriété 3) les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

Remarque importante :

Il ne faut surtout pas, pour déterminer la mesure de l'angle $A\hat{B}y$, affirmer que les deux angles sont alternes internes, et par conséquent de même mesure. Pourquoi ? Parce que nous ignorons, à ce moment de la démonstration, que les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

▶ *Méthode 2 :* Avec les angles correspondants



▷ Calcul de l'angle $y'\hat{B}z'$:

Les angles $y'\hat{B}z'$ et $y\hat{B}z'$ sont des angles supplémentaires.

donc $y'\hat{B}z' = 180 - y\hat{B}z' = 180 - 100 = 80°$

▷ Les droites (xx') et (yy') sont-elles parallèles ?

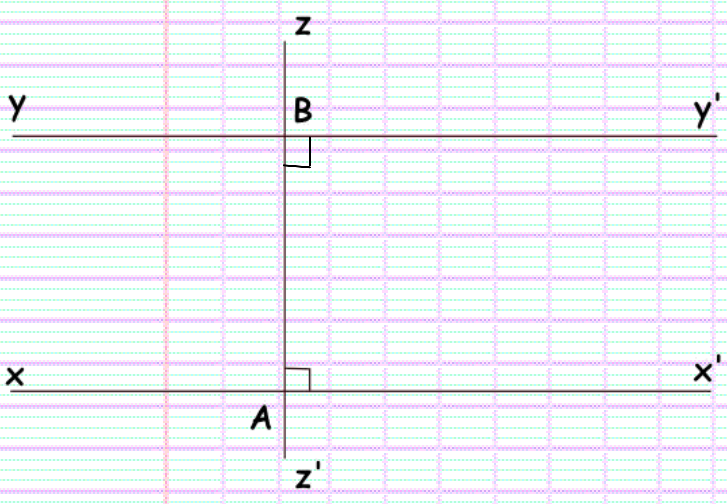
- Les angles $x'\hat{A}B$ et $y'\hat{B}z'$ sont des angles correspondants.
- De plus, ces deux angles ont même mesure : $x'\hat{A}B = y'\hat{B}z' = 80°$

Donc (propriété 4) les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

Remarques :

▷ Nous pouvons constater que ces deux démonstrations sont totalement similaires.
▷ De plus, dans les deux démonstrations, le choix des angles utilisés peut être différent.

Remarque : Cas particulier



Les deux droites (xx') et (yy') sont perpendiculaires à la droite (zz').
Montrer que les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

▷ Les droites (xx') et (yy') sont-elles parallèles ?

- Les angles $x'\hat{A}B$ et $A\hat{B}y$ sont des angles alternes-internes.
- De plus, ces deux angles ont même mesure : $x'\hat{A}B = A\hat{B}y = 90°$

Donc (propriété 3) les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

Ce résultat est connu depuis la classe de Sixième. Ceci en est une démonstration.
Le théorème est le suivant :
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors ces deux droites sont parallèles.