THEME 8

ARITHMETIQUE
PGCD
FRACTION IRREDUCTIBLE

Exercice 1 :

Une classe compte 30 élèves. Nous voulons les ranger. De combien de façons peut-on ranger ces élèves pour que toutes les colonnes soient complètes ?

Exercice 2 :

Un terrain rectangulaire a pour dimensions, en mètres, 28 m sur 60 m. On désire entourer ce terrain d'un treillage soutenu par des poteaux régulièrement espacés. Quelle distance sépare deux poteaux, si cette distance est la plus grande possible ?

Exercice 3 : Brevet des Collèges - BORDEAUX - 2000

Ecrire sous forme d'une fraction irréductible le nombre $\frac{325}{1053}$

Indication : on pourra calculer le PGCD des nombres 1053 et 325

Exercice 4 : Brevet des Collèges - CAEN - 2000

a)Calculer le PGCD de 110 et 88.

b)Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante « Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte. »

Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

c)Combien obtiendra-t-il de carrés par plaque ?

Exercice 5 : Brevet des Collèges - Limoges - 2000

a)Calculer le PGCD de 114 400 et 60 775.

b)Expliquer comment, sans utiliser la touche « fraction » de votre calculatrice, rendre irréductible la fraction $\frac{60\,775}{114\,400}$

c)Donner l'écriture simplifiée de $\frac{60\,775}{114\,400}$

Exercice 6 : Brevet des Collèges - Nancy-Metz - 2000

Ecrire sous forme irréductible, la fraction $\frac{630}{924}$ en donnant le détail de tous les calculs.

Exercice 7 : Brevet des Collèges - Nantes - 2000

a)Démontrer que les nombres 65 et 42 sont premiers entre eux.

b)Démontrer que : $\frac{520}{336} = \frac{65}{42}$

Exercice 8 : Brevet des Collèges - Orléans-Tours - 2000

On pose $M = \frac{20\,755}{9\,488} - \frac{3}{8}$

a)Calculer le plus grand diviseur commun D aux deux nombres 20 755 et 9 488. (On reportera avec soin sur la copie les calculs qui conduisent à D)

b)Ecrire, en détaillant les calculs, le nombre M sous forme d'une fraction irréductible.

c)Le nombre M est-il décimal ? Est-il rationnel ? Justifier.

Exercice 9 : Brevet des Collèges - Paris-Créteil-Versailles - 2000

Un philatéliste possède 1 631 timbres français et 932 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa Collection en réalisant des lots identiques, c'est à dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et étrangers.

a)Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser.

b)Combien y aura-t-il, dans ce cas, de timbres français et étrangers par lot ?

Exercice 10 : Brevet des Collèges - Poitiers - 2000

En utilisant la méthode de votre choix, démontrer que les nombres 1 432 et 587 sont premiers entre eux.

Exercice 11 : Brevet des Collèges - Amérique du Nord - 2000

Un collège décide d'organiser une épreuve sportive pour tous les élèves. Les professeurs constituent le plus grand nombre possible d'équipes. Chaque équipe doit comprendre le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Sachant qu'il y a 294 garçons et 210 filles, quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut composer ? Combien y a-t-il de filles et de garçons dans chaque équipe ?

Exercice 12 : Brevet des Collèges - Centres étrangers-Groupe 1- 2000

Montrer que $\frac{36}{47}$ est une fraction irréductible.

Montrer que $\frac{216}{282}$ est égale à la fraction irréductible $\frac{36}{47}$

Exercice 13 : Brevet des Collèges - Asie - 2000

Déterminer le Plus Grand Commun Diviseur de 3575 et 2730.

Exercice 14 : Brevet des Collèges - Centres étrangers-Groupe 2 - 2000

Quel est le PGCD de 96 et de 156 ? Utiliser ce résultat pour rendre la fraction $\frac{96}{156}$ irréductible.

Exercice 15 : Brevet des Collèges - Europe de l'Est - 2000

Les nombres 105 et 84 sont-ils premiers entre eux? Justifier.

Simplifier $\frac{105}{84}$ pour la rendre irréductible.

Justifier que le résultat obtenu est bien une fraction irréductible.

Exercice 16 : Brevet des Collèges - Nantes-Bordeaux-Caen-Limoges-Orléans-Poitiers-Rennes -01

1. Déterminer le PGCD des nombres 108 et 135.
2. Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires.

II veut faire des paquets de sorte que

• tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges.
• tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires.
• toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.

a)Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?

b)Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

Exercice 17 : Brevet des Collèges - Nice-Aix-Marseille-Corse-Montpellier-Toulouse - 2001

a)Donner l'égalité traduisant la division euclidienne de 1 512 par 21.

b)Rendre irréductible la fraction $\frac{720}{1512}$

Exercice 18 : Brevet des Collèges - Afrique du Nord-Madagascar - 2001

a)Calculer le PGCD de 9 240 et 3 822

b)Simplifier la fraction $\frac{3822}{9240}$ pour la rendre irréductible; vous noterez sur votre copie le détail des calculs.

Exercice 19 : Brevet des Collèges - Asie du Sud-Est-Océan Indien - 2001

On considère la fraction $\frac{5148}{1386}$

a)Déterminer, par la méthode de votre choix, le PGCD des nombres 5 148 et 1 386.

b)Utiliser le résultat de la question précédente pour rendre irréductible la fraction $\frac{5148}{1386}$

Exercice 20 : Brevet des Collèges - Pondichéry - 2001

1)Calculer le PGCD de 1756 et 1 317 (on détaillera les calculs nécessaires)

2. Un fleuriste a reçu 1 756 roses blanches et 1 317 roses rouges. Il désire réaliser des bouquets identiques (c'est-à-dire comprenant un même nombre de roses et la même répartition entre les roses blanches et les rouges) en utilisant toutes les fleurs.

a)Quel sera le nombre maximum de bouquets identiques? Justifier clairement la réponse.

b)Quelle sera alors la composition de chaque bouquet?

Exercice 21 : Brevet des Collèges - Sujet complémentaire - 2001

1)Ecrire sous la forme de fraction irréductible, le nombre F tel que $F = \frac{3520}{10780}$

Vous pourrez, par exemple, déterminez le PGCD des deux entiers 3 520 et 10 780.

2)a)Quel est l'entier naturel n tel que: $n^2 = 49 \times F$?

b)Quels sont les entiers relatifs p tels que : $p^2 = 49 \times F$?

Exercice 22 : Brevet des Collèges - Sujet complémentaire - 2001

Soit la fraction $\frac{21.}{7770}$

Déterminez le chiffre représenté au numérateur par un point sachant que cette fraction est irréductible. Le raisonnement suivi et les différents calculs effectués doivent figurer sur votre copie.

Exercice 23 :

1. Calculer PGCD(39 ; 135).
2. Christophe a un champ rectangulaire qu'il veut clôturer. Les dimensions du champ sont, en mètres, 39 sur 135. Il veut planter des poteaux à distance régulière supérieure à 2 m et mesurée par un nombre entier en mètres. De plus, il place un poteau à chaque coin.

a)Quelle est la distance entre deux poteaux ?

b)Combien de poteaux doit-il planter ?

Exercice 24 :

Les dimensions d'une caisse sont 105 cm, 165 cm et 105 cm. On veut réaliser des boîtes cubiques, les plus grandes possibles, qui permettent de remplir entièrement la caisse.

Quelle doit être l'arête de ces boites et combien de telles boites peut-on placer dans la caisse ?

Exercice 25 :

On dispose de deux bidons de contenance respective 18 litres et 15 litres. En versant un nombre entier de fois le contenu d'un récipient dans chacun d'eux, on peut les remplir exactement.

Quelle est la plus grande contenance possible de ce récipient ?

Exercice 26 :

Une pièce rectangulaire mesure 4,2 m sur 8,7 m. Son sol est couvert de dalles entières et carrées.
1. Quelle est la plus grande dimension possible pour chacune de ces dalles ?
2. Combien faut-il alors de ces dalles pour couvrir le sol de la pièce ?

Exercice 27 :

Disposant de peu de moyens, deux clubs de football ont décidé de fusionner. Le premier compte 120 membres et le second 144. Pour définir les modalités de la fusion, une commission est formée. Le nombre de représentants de chaque club doit être proportionnel au nombre de licenciés. On voudrait que la commission soit la plus restreinte possible.
Combien chaque club doit-il désigner de représentants ?

Exercice 28 :

Une cafetière de 96 cl et une théière de 72 cl remplissent exactement des tasses de même capacité.
Quelle est la plus grande capacité que peuvent avoir ces tasses ?

Exercice 29 :

On veut carreler une pièce rectangulaire ayant pour dimensions 4,2 m et 3,6 m. Quelle est la mesure du côté des carreaux utilisés, sachant que cette mesure doit être la plus grande possible ?

Exercice 30 :

On veut partager deux pièces de tissus mesurant respectivement 225 m et 105 m en coupons de même longueur, leur nombre étant le plus petit possible. Quelle est la longueur de chaque coupon ?

Exercice 31 :

On veut planter tout autour d'un champ triangulaire, dont les côtés mesurent 120 m, 156 m et 172 m, des arbres également espacés. Sachant qu'il y a un arbre à chaque sommet, quel est le plus grand intervalle possible qui séparera deux arbres ? Combien faut-il d'arbres ?

Exercice 32 :

Une maison comporte deux étages. La hauteur du rez-de-chaussée est 3,15 m et celle du premier étage est 2,85 m. On construit un escalier reliant le rez-de-chaussée au deuxième étage (avec un palier au premier étage). La hauteur des marches étant identique sur tout l'escalier, quelle doit être cette hauteur ?

Exercice 33 :

Démontrer que le nombre $\frac{1-\pi^2}{1-\pi} - \pi$ est un rationnel . Est-ce un entier naturel ?

Exercice 34 :

Vérifier, par le calcul, que les nombres $3^2 - 2^2$; $12^2 - 11^2$; $100^2 - 99^2$ sont impairs.
Démontrer que quel que soit le nombre entier n, le nombre $(n+1)^2 - n^2$ est impair.

Exercice 35 :

Démontrer qu'un nombre dont l'écriture est du type AAA (3 chiffres identiques) est divisible par 111 et par 37 .

Autres exercices :

1 . Quel est le chiffre des unités de chacun des nombres 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7 …. 3^{50} ?
Quel est le chiffre des unités du nombre 9^{50} ?

2 . Quels sont les restes obtenus dans la division euclidienne par 12 des nombres 13, 13^2, 13^3, 13^4 ?
Démontrer, sans calculer ce nombre, que $13^5 - 1$ est divisible par 12.

3 . Quels sont les restes obtenus dans la division euclidienne par 7 des nombres 39, 39^2, 39^3, 39^4, 39^5, 39^{36}, 39^{53} ?

Exercice 36 :

On joint l'origine O d'un repère au point A de coordonnées (72 ; 48).
a)Par combien de points dont les deux coordonnées sont entières le segment [OA] passe-t-il ?
b)Donner les coordonnées de ces points.

Exercice 37 :

a) Déterminer PGCD(18 ; 30).
b) Déterminer la liste des six premiers multiples de 18 ; et des quatre premiers multiples de 30.
c) En déduire le Plus Petit des Multiples Communs de 18 et 30 (noté PPCM(18 ; 30)).
d) Comparer les deux nombres suivants :

$$18 \times 30 \quad \text{et} \quad \text{PPCM}(18\ ;\ 30) \times \text{PGCD}(18\ ;\ 30).$$

Exercice 38 :

Un grossiste en fleurs a reçu un lot de 7200 roses et 10800 tulipes. Il veut réaliser des bouquets tous identiques composés de roses et de tulipes en utilisant toutes les fleurs.
Quel nombre maximal de tels bouquets peut-il composer ?
Une rose lui revient à 8 francs, une tulipe à 3 francs. A combien lui revient un de ces bouquets ?

Exercice 39 :

Classer les nombres suivants en Nombres Entiers Naturels, Nombres Décimaux, Nombres Entiers Relatifs, Nombres Rationnels et Nombres Irrationnels. (Ne pas justifier)

$$-17 \quad ; \quad 5\pi \quad ; \quad 5{,}236 \quad ; \quad \frac{5}{3} \quad ; \quad \sqrt{2} \quad ; \quad -\frac{35}{5} \quad ;$$

Explique pourquoi la fraction P = $\frac{117}{63}$ n'est pas irréductible.
Simplifie la fraction P pour la rendre irréductible.
Les nombres 70 et 99 sont-ils premiers entre eux ?
Les nombres 216 et 282 sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 40 :

1. Deux entiers naturels distincts x et y sont tels que : 315x = 168y.
Pourquoi sait-on que $y \neq 0$?
Donner la fraction irréductible égale à $\frac{x}{y}$

2. F = $\frac{n+9}{n-6}$ où n est un entier supérieur à 6.
Démontrer que F = $1+\frac{15}{n-6}$
En déduire toutes les valeurs de n pour lesquelles F est un nombre entier.
(D'après Transmath 3ème NATHAN)