THEME 8

CALCUL DU RAYON DU CERCLE INSCRIT D'UN TRIANGLE RECTANGLE

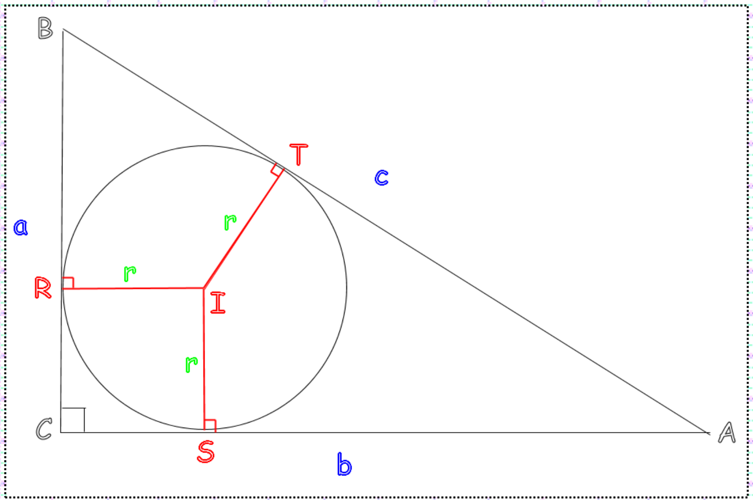
Exercice 1 :

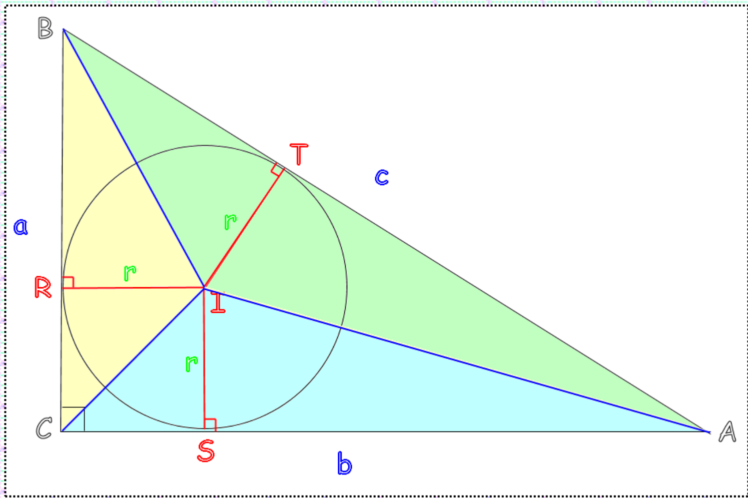
Soit ABC un triangle rectangle en C.
Nous appellerons a la longueur du coté [BC] , b la longueur du côté [AC] et c la longueur du coté [AB] .
Soit I le centre du cercle inscrit à ce triangle et soit r le rayon de ce cercle.

1. Calculer l'aire du triangle rectangle ABC.
2. Calculer les aires des triangles CIB , AIC et BIA .
3. En déduire que ar + br + cr = ab , puis que

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

4. Applications numériques : *(unité : le cm)*
   a)Calculer le rayon du cercle inscrit du triangle rectangle dont les côtés mesures 3 , 4 et 5.
   b)Calculer le rayon du cercle inscrit au triangle EFG rectangle en E tel que EF = 5 et FG = 13.

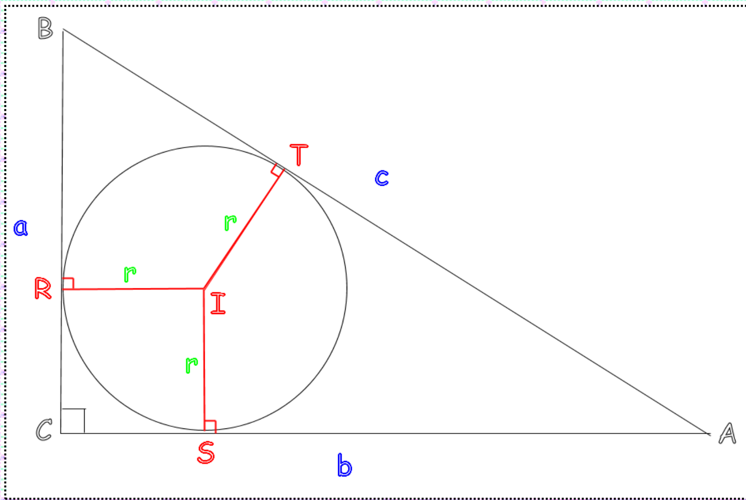




Exercice 2:

Soit ABC un triangle rectangle en C.
Nous appellerons a la longueur du coté [BC] , b la longueur du côté [AC] et c la longueur du coté [AB] .
Soit I le centre du cercle inscrit à ce triangle et soit r le rayon de ce cercle.

1. Montrer que BR = BT , puis que AS = AT.
2. Déterminer BR et AS.



3. En constatant que BA = BT + TA, en déduire que :

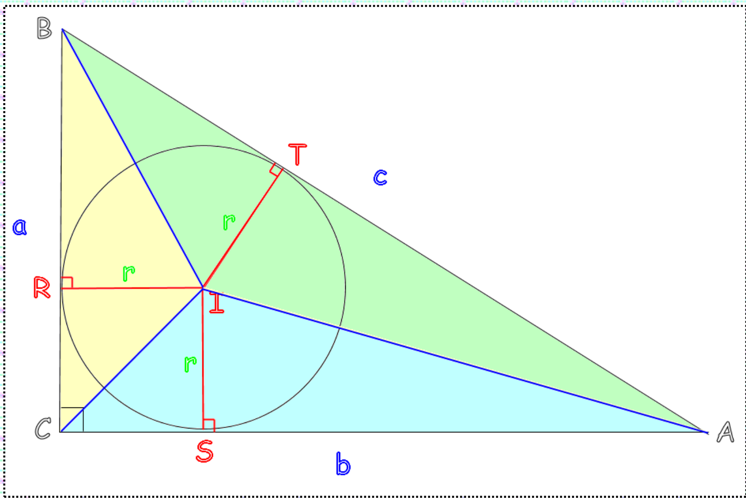
$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{ou} \quad r = \frac{1}{2}(a+b-c)$$

Correction de l'exercice 1 :

1. Aire du triangle ABC :

Le triangle ABC étant rectangle en C, l'aire du triangle ABC est égale à :

$$\frac{BC \times AC}{2} = \frac{a \times b}{2} = \frac{ab}{2}$$



2. Calcul des aires des triangles CIB , AIC et BIA :

- Aire du triangle CIB :

$$\frac{BC \times IR}{2} = \frac{ar}{2}$$

- Aire du triangle AIC :

$$\frac{AC \times IS}{2} = \frac{br}{2}$$

- Aire du triangle BIA :

$$\frac{AB \times IT}{2} = \frac{cr}{2}$$

3. Calcul de r en fonction de a , b et c :

L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des trois triangles CIB , AIC et BIA .

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{CIB} + \mathcal{A}_{AIC} + \mathcal{A}_{BIA}$$

donc :

$$\frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} *$$

$$\frac{ab}{2} = \frac{ar+br+cr}{2}$$

Puis en simplifiant par 2,

$$ab = ar + br + cr$$

$$ab = r(a+b+c)$$

$$\frac{ab}{a+b+c} = r \qquad\qquad r = \frac{ab}{a+b+c}$$

4. Applications numériques :

Cas 1 : Rayon du cercle inscrit du triangle rectangle dont les côtés mesures 3 , 4 et 5.

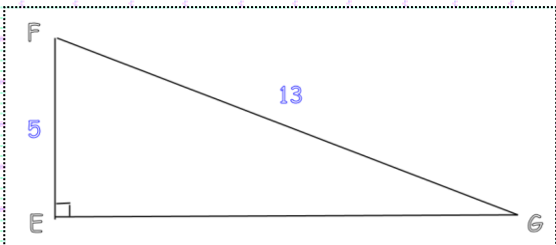
L'hypoténuse de ce triangle rectangle est 5 , donc c = 13. Maintenant, le choix de a et b est symétrique.

Nous pouvons poser a = 3 et b = 4 ou a = 4 et b = 3.

Le rayon r du cercle inscrit est donc égal à :

$$r = \frac{3 \times 4}{3+4+5} = \frac{12}{12} = 1$$

Cas 2 : Rayon du cercle inscrit du triangle EFG rectangle en E tel que EF = 5 et FG = 13.



Calculons tout d'abord la longueur du troisième côté .

Dans le triangle EFG rectangle en E

D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$$FG^2 = EF^2 + EG^2$$

$$13^2 = 5^2 + EG^2$$

$169 = 25 + EG^2$

$169 - 25 = EG^2$

$EG^2 = 144$

$EG = \sqrt{144} = 12$

Le rayon r du cercle inscrit est donc égal à :

$$r = \frac{5\times 12}{5+12+13} = \frac{5\times 12}{30} = \frac{5\times 12}{5\times 6} = \frac{6\times 2}{6} = 2$$

Remarque :

Dans de nombreuses formules mathématiques concernant le triangle, on utilise une donnée s'appelant le demi-périmètre.

Le périmètre d'un triangle (quelconque) dont les côtés mesurent a , b et c, est égal à :

$a + b + c$

Le demi-périmètre p est alors égal à $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Dans le cas d'un triangle rectangle, nous venons de démontrer que le rayon du cercle inscrit est à gal à :

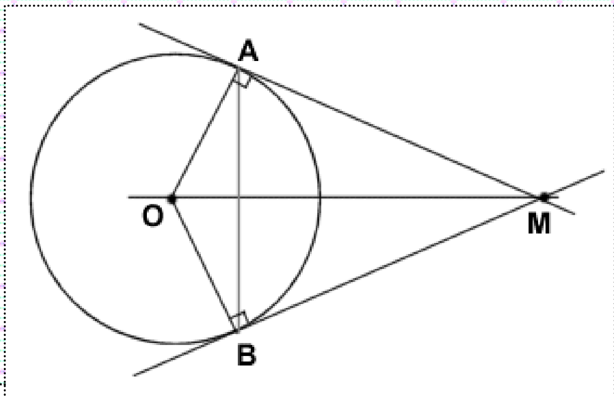
$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

Nous avons également : (avec S l'aire du triangle et p <u>le demi périmètre</u>)

$$r = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{S}{p} \qquad\qquad r = \frac{S}{p}$$

Correction de l'exercice 2 :

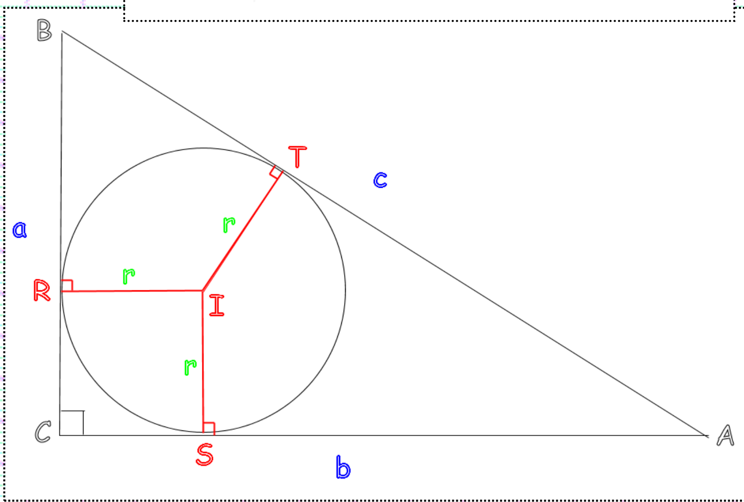
<u>1. Montrer que BR = BT , puis que AS = AT :</u>



Soit C un cercle et soit M un point extérieur à ce cercle. Si (MA) et (MB) sont les tangentes issues de M à ce cercle en A et B, alors MA = MB

(Cf. Thème : Tangente à un cercle)

Sans utiliser ce résultat, nous pouvons faire une démonstration rapide en utilisant le théorème de Pythagore.



Dans le triangle BRI rectangle en R ,

D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$BI^2 = BR^2 + RI^2$

$BI^2 - RI^2 = BR^2$

$BR^2 = BI^2 - r^2 \qquad (1)$

Dans le triangle BTI rectangle en R ,

D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$BI^2 = BT^2 + TI^2$

$BI^2 - TI^2 = BT^2$

$BT^2 = BI^2 - r^2 \qquad (2)$

Des deux égalités (1) et (2), nous en déduisons :

$BR^2 = BT^2$

Et comme BR et BT sont des nombres positifs (longueurs de cotés de triangle), nous avons :

BR = BT

Une démonstration identique permet de démontrer que AS = AT et même que CR = CS (égalité déjà connue car CR = CS = r).

2. Calcul de BR et AS :

Le quadrilatère CSIR est un carré (3 angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur)
Donc RC = r.

- R est un point du segment [BC], donc BC = BR + RC

Donc $a = BR + r$

Et par suite $BR = a - r$

- *S est un point du segment [AC], donc AC = AS + SC*

Donc $b = AS + r$

Et par suite $AS = b - r$

3. Calcul du rayon du cercle inscrit au triangle :

Nous avons :

$$BA = BT + TA$$

Or BR = BT et *AS = AT*

Donc $BA = BT + TA$

Donc :

$$c = (a - r) + (b - r)$$
$$c = a - r + b - r$$
$$c = a + b - 2r$$
$$2r = a + b - c$$

Et par suite $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ ou $r = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$

Vérification pour les deux cas numériques étudiés dans l'exercice 1 :

- Cas 1 :

$$r = \frac{3+4-5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- Cas 2 :

$$r = \frac{5+12-13}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Remarque :

Le rayon du cercle circonscrit à un triangle rectangle est égal à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.