

THEME 8

EXERCICES - CALCUL VECTORIEL 1

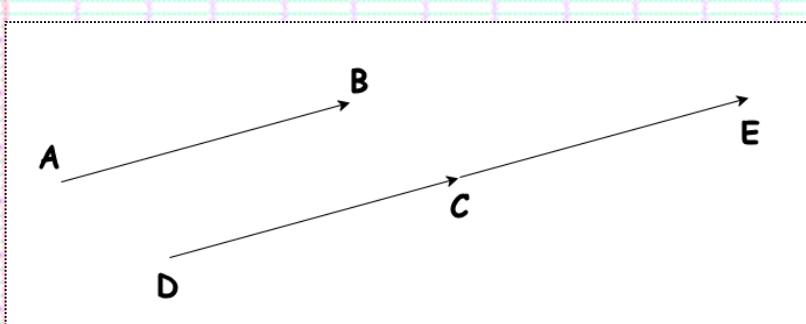
► Exercice 1 :

Soient A, B, C, D et E cinq points n'appartenant pas tous à une même droite vérifiant :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$$

- Que peut-on dire des points C, D et E ?
- Quelle est la nature des quadrilatères ABCD et ABEC ?
- Que représente, pour le triangle ABC le point d'intersection des droites (AE) et (BD) ?

Solution :



a) Position des points D, C et E :

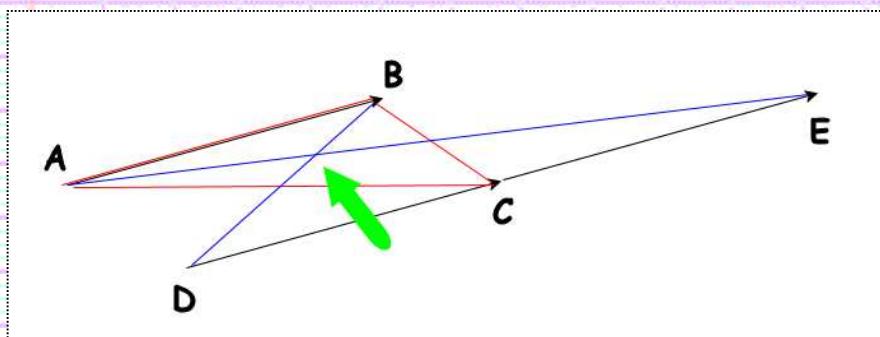
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ donc C est milieu du segment [DC]

b) Nature des quadrilatères ABCD et ABEC :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ donc ABEC est un parallélogramme.

c) Nature du point d'intersection des droites (AE) et (BD) pour le triangle ABC :



ABCD est un parallélogramme (question b)
donc les diagonales [BD] et [AC] ont même milieu

Dans un triangle , une médiane est
une droite issue d'un sommet qui
coupe le côté opposé en son milieu .

donc (BD) coupe le segment $[AC]$ en son milieu
donc (BD) est la médiane issue de B dans le triangle ABC .

$ABEC$ est un parallélogramme (question b)

donc les diagonales $[BC]$ et $[AE]$ ont même milieu

donc (AE) coupe le segment $[BC]$ en son milieu

donc (AE) est la médiane issue de A dans le triangle ABC .

Dans un triangle, les médianes sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.

Le point d'intersection des deux médianes (BD) et (AE) est le centre de gravité du triangle ABC

► Exercice 2 :

Soient $ABCD$ et $ABEF$ deux parallélogrammes.

Démontrer que le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.

Solution :

$ABCD$ est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

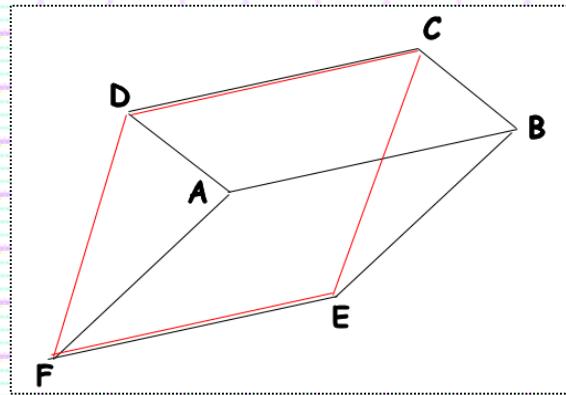
$ABEF$ est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$$

Des deux égalités précédentes, nous pouvons en conclure que :

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$$

donc $DCEF$ est un parallélogramme.



► Exercice 3 :

Soient A, B et C trois points non alignés.

a) Construire, au compas, le point M tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$

b) Soit N le point vérifiant $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB}$. Que peut-on dire des points N, C et M ?

Solution :

a) Construction du point M :

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$ donc $CMBA$ est un parallélogramme.

Il suffit donc de construire, connaissant trois points, d'un parallélogramme, le quatrième point.

Etape 1 : Prendre l'écartement AB avec le compas.

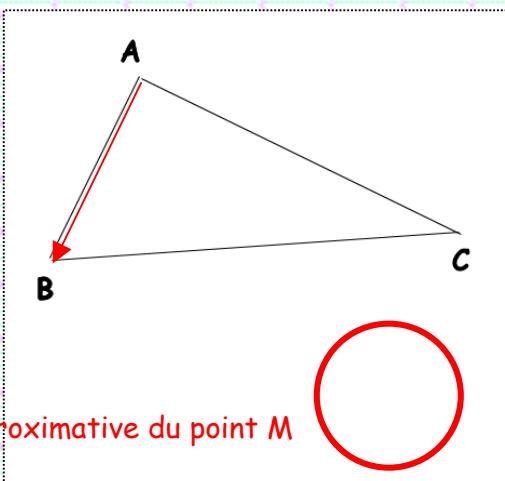
Etape 2 : Pointe sèche en C , tracer un arc de cercle.

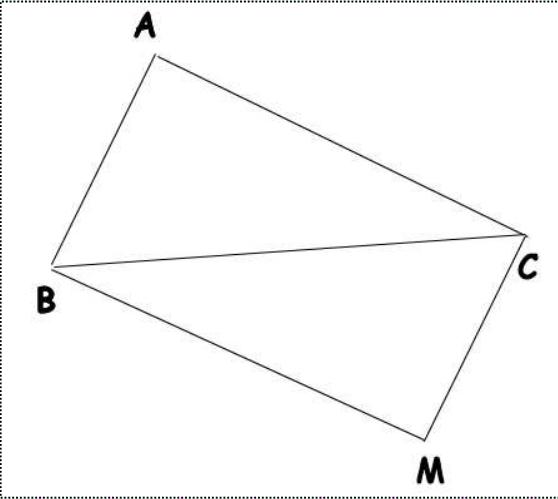
Etape 3 : Prendre l'écartement AC avec le compas.

Etape 4 : Pointe sèche en B , tracer un arc de cercle.

Etape 5 : Le point M est l'intersection des deux arcs de cercle.

Position approximative du point M





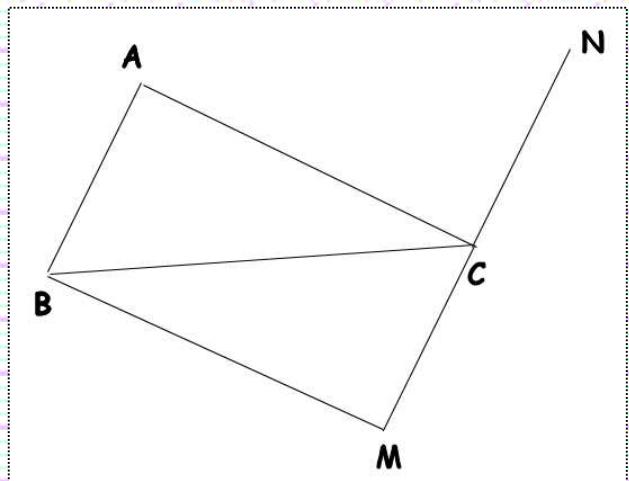
b) Position des points N, C et M :

$$\vec{NC} = \vec{AB} \text{ et } \vec{CM} = \vec{AB}$$

donc

$$\vec{NC} = \vec{CM}$$

donc C est milieu de [NM]



► Exercice 4 :

Soient A, B et C trois points non alignés.

Soit I le milieu de [AB]. Soit D l'image du point C dans la translation de vecteur \vec{AI} . Quelle est la nature du quadrilatère IBDC ?

Solution :

D est l'image du point C dans la translation de vecteur \vec{AI} donc

$$\vec{AI} = \vec{CD}$$

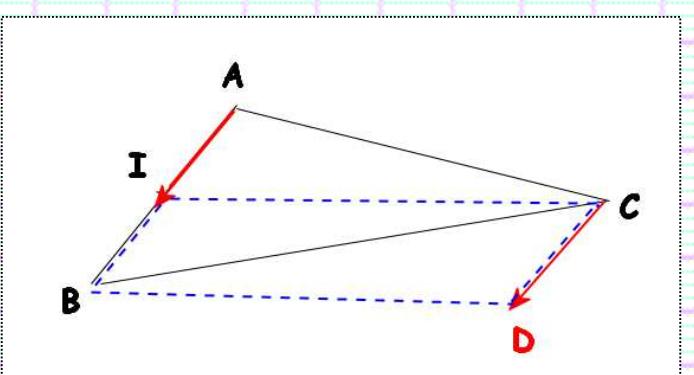
I est milieu de [AB] donc

$$\vec{AI} = \vec{IB}$$

Des deux égalités vectorielles précédentes, nous pouvons écrire :

$$\vec{IB} = \vec{CD}$$

donc IBDC est un parallélogramme.



► Exercice 5 :

Soit ABCD un parallélogramme et soit E l'image de C dans la translation de vecteur \vec{AB} .

a) Montrer que $\vec{DC} = \vec{CE}$.

b) Que peut-on en déduire pour le point C ?

Solution :

a) Egalité des vecteurs \overrightarrow{DC} et \overrightarrow{CE} :

ABCD est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

E est l'image de C dans la translation de vecteur \overrightarrow{AB} donc

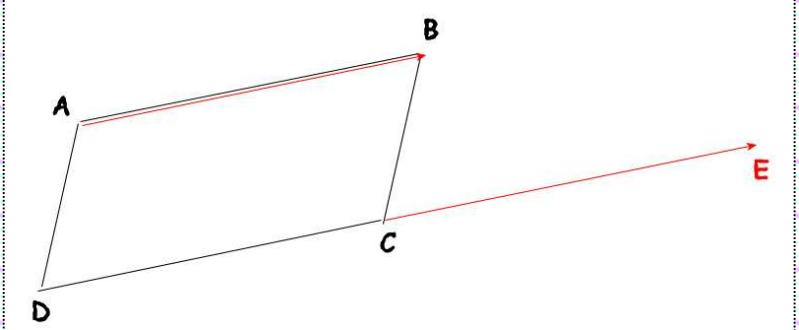
$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$$

Des deux égalités, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$$

b) Position du point C :

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ donc C est milieu de [DE]



Exercice 6 :

Soit [EF] et [CD] deux diamètres d'un même cercle.

Montrer que $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC}$

Solution :

En appelant O le centre du cercle, nous avons :

O milieu de [CD] ([CD] est un diamètre du cercle de centre O)

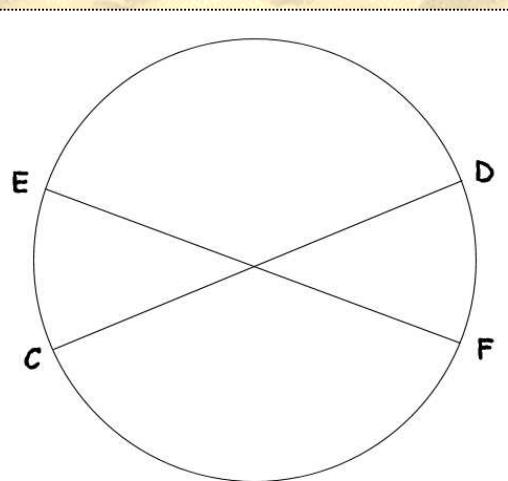
O milieu de [EF] ([EF] est un diamètre du cercle de centre O)

Les diagonales du quadrilatère ECFD ont même milieu

Donc ECFD est un parallélogramme.

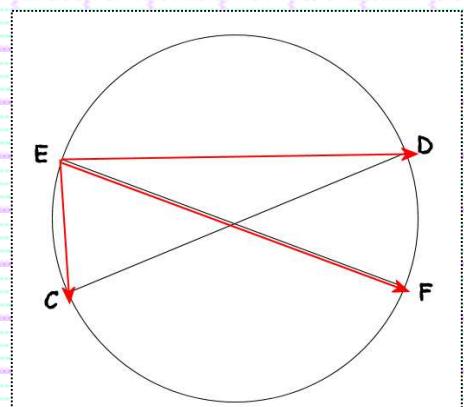
(C'est même un rectangle - diagonales de même longueur - mais cette information est inutile ici)

ECD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EF}$ (cf. cours - Addition vectorielle - Méthode du parallélogramme)



ECD est un parallélogramme donc DECF est un parallélogramme (autre nom du même parallélogramme)

DECF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC}$ (cf. cours - Addition vectorielle - Méthode du parallélogramme)



Exercice 7 : Brevet des Collèges - Afrique - 1996

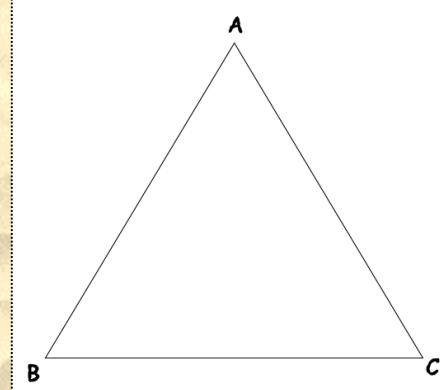
Construire un triangle équilatéral ABC de 5 cm de côté, puis placer sur la figure les points M et N tels que

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC}$$

Question supplémentaire (non demandé au Brevet)

Montrer que B est milieu de [MN]



Solution :

Construction de M :

$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$ donc $CAMB$ est un parallélogramme

Construction de N :

$\vec{BN} = \vec{AC}$ donc $BNCA$ est un parallélogramme (ou N est le translaté de B dans la translation de vecteur \vec{AC})

Question supplémentaire - Position de B :

$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$ donc $CAMB$ est un parallélogramme

donc

$$\vec{MB} = \vec{AC}$$

De plus $\vec{BN} = \vec{AC}$ (hypothèse)

Donc $\vec{MB} = \vec{BN}$

Donc B est milieu de $[MN]$

