

# THEME 8

## EXERCICES - CALCUL VECTORIEL 1

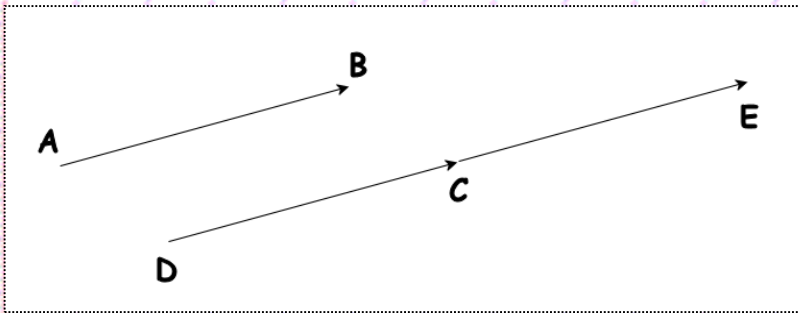
### ➤ Exercice 1 :

Soient A, B, C, D et E cinq points n'appartenant pas tous à une même droite vérifiant :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$$

- a) Que peut-on dire des points C, D et E ?
- b) Quelle est la nature des quadrilatères ABCD et ABEC ?
- c) Que représente, pour le triangle ABC le point d'intersection des droites (AE) et (BD) ?

### Solution :



a) Position des points D, C et E :

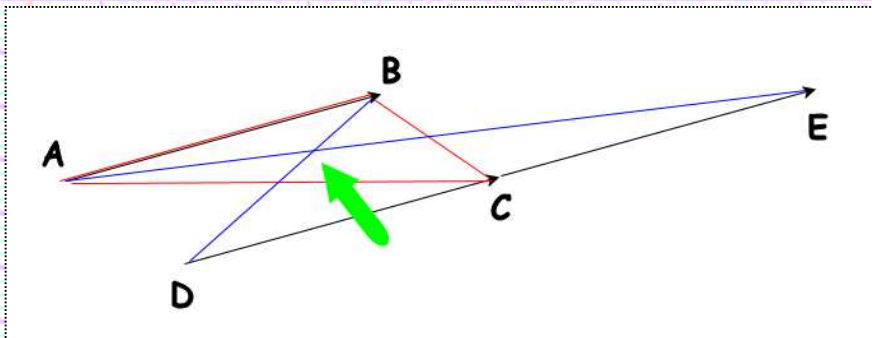
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} \text{ donc } C \text{ est milieu du segment } [DE]$$

b) Nature des quadrilatères ABCD et ABEC :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ donc } ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} \text{ donc } ABEC \text{ est un parallélogramme.}$$

c) Nature du point d'intersection des droites (AE) et (BD) pour le triangle ABC :



ABCD est un parallélogramme ( question b )  
donc les diagonales [BD] et [AC] ont même milieu

Dans un triangle , une médiane est  
une droite issue d'un sommet qui  
coupe le côté opposé en son milieu .

donc (BD) coupe le segment [AC] en son milieu  
 donc (BD) est la médiane issue de B dans le triangle ABC.

ABEC est un parallélogramme ( question b )

donc les diagonales [BC] et [AE] ont même milieu

donc (AE) coupe le segment [BC] en son milieu

donc (AE) est la médiane issue de A dans le triangle ABC.

Dans un triangle, les médianes sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.

Le point d'intersection des deux médianes (BD) et (AE) est le centre de gravité du triangle ABC

### ➤ Exercice 2 :

Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.

Démontrer que le quadrilatère DCEF est un parallélogramme.

### Solution :

ABCD est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

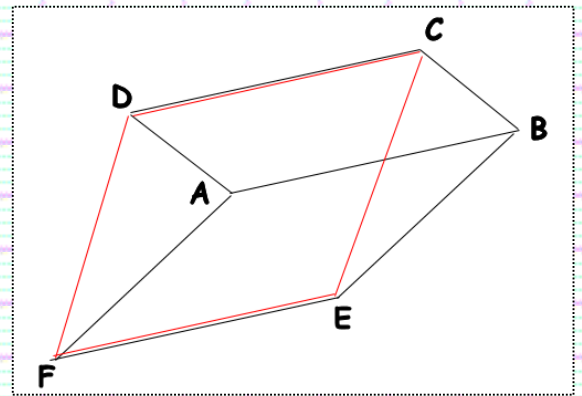
ABEF est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$$

Des deux égalités précédentes, nous pouvons en conclure que :

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$$

donc DCEF est un parallélogramme.



### ➤ Exercice 3 :

Soient A, B et C trois points non alignés.

a) Construire, au compas, le point M tel que  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$

b) Soit N le point vérifiant  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB}$ . Que peut-on dire des points N, C et M ?

### Solution :

a) Construction du point M :

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$  donc CMBA est un parallélogramme.

Il suffit donc de construire, connaissant trois points, d'un parallélogramme, le quatrième point.

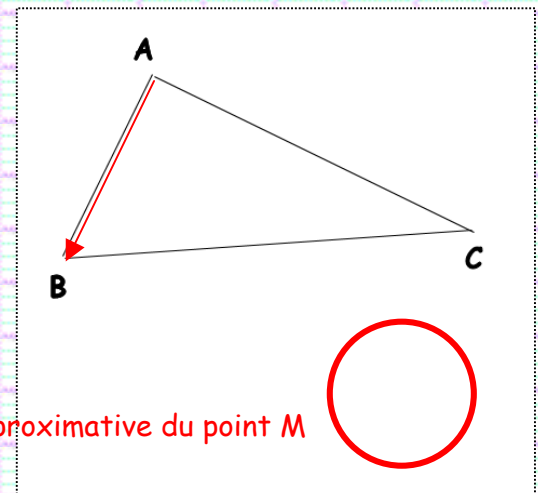
Etape 1 : Prendre l'écartement AB avec le compas.

Etape 2 : Pointe sèche en C, tracer un arc de cercle.

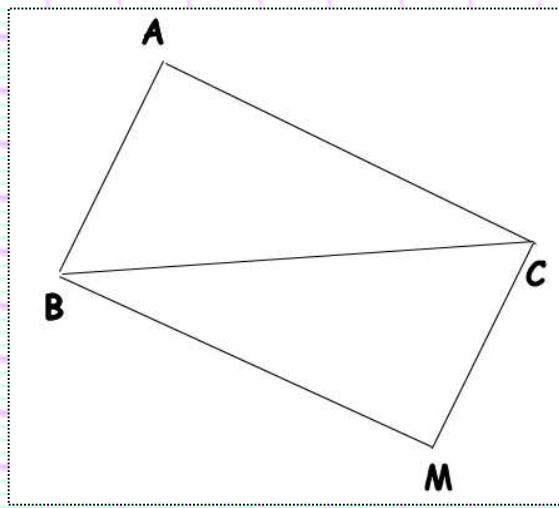
Etape 3 : Prendre l'écartement AC avec le compas.

Etape 4 : Pointe sèche en B, tracer un arc de cercle.

Etape 5 : Le point M est l'intersection des deux arcs de cercle.



Position approximative du point M



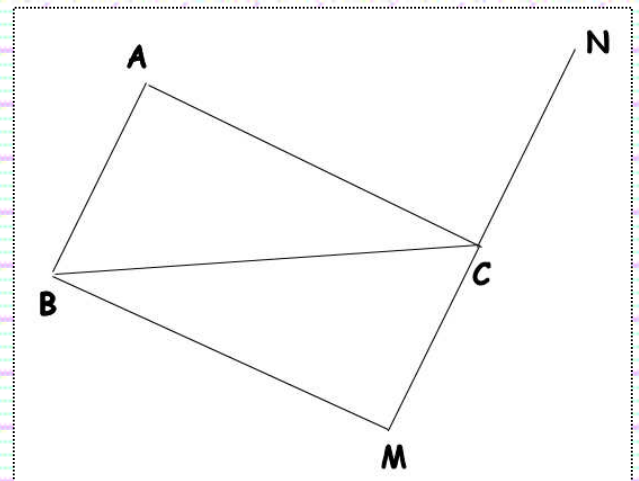
b) Position des points N, C et M :

$$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$$

donc

$$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CM}$$

donc C est milieu de [NM]



### ► Exercice 4 :

Soient A, B et C trois points non alignés.

Soit I le milieu de [AB]. Soit D l'image du point C dans la translation de vecteur  $\overrightarrow{AI}$ .

Quelle est la nature du quadrilatère IBDC ?

### Solution :

D est l'image du point C dans la translation de vecteur  $\overrightarrow{AI}$  donc

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CD}$$

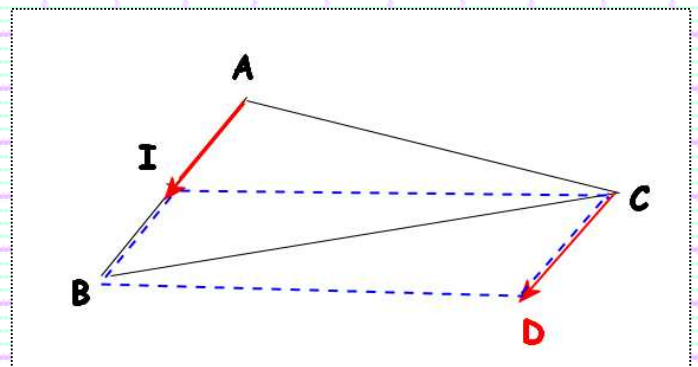
I est milieu de [AB] donc

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

Des deux égalités vectorielles précédentes, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CD}$$

donc IBDC est un parallélogramme.



### ► Exercice 5 :

Soit ABCD un parallélogramme et soit E l'image de C dans la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

a) Montrer que  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ .

b) Que peut-on en déduire pour le point C ?

**Solution :**

a) Egalité des vecteurs  $\overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{CE}$  :

ABCD est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

E est l'image de C dans la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  donc

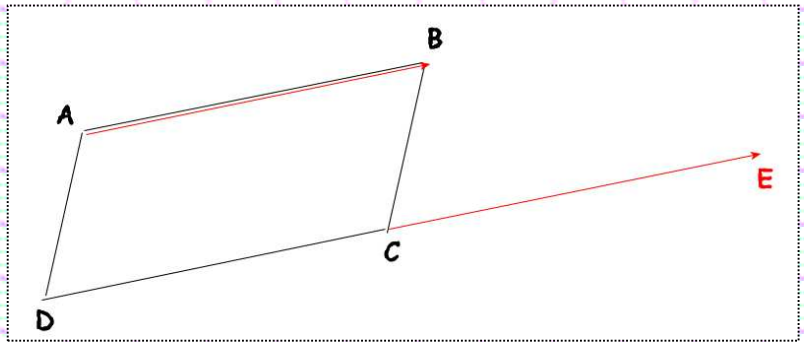
$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$$

Des deux égalités, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$$

b) Position du point C :

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$  donc C est milieu de (DE)



➤ **Exercice 6 :**

Soit [EF] et [CD] deux diamètres d'un même cercle.

Montrer que  $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC}$

**Solution :**

En appelant O le centre du cercle, nous avons :

O milieu de [CD] ( [CD] est un diamètre du cercle de centre O )

O milieu de [EF] ( [EF] est un diamètre du cercle de centre O )

Les diagonales du quadrilatère ECFD ont même milieu

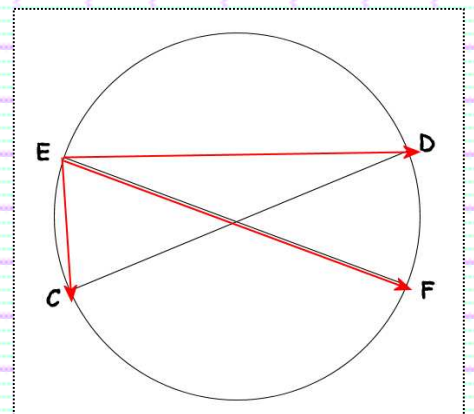
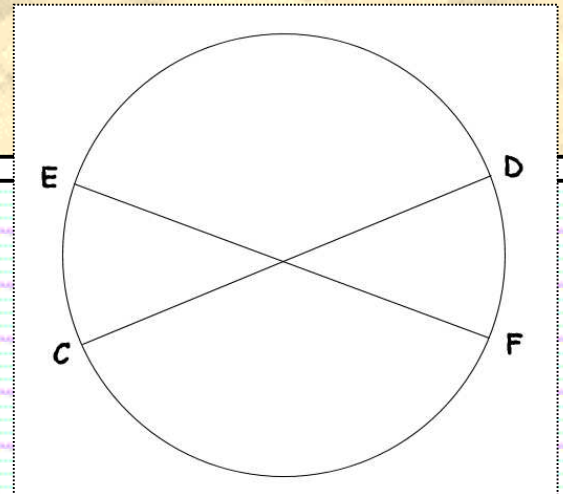
Donc ECFD est un parallélogramme.

( C'est même un rectangle - diagonales de même longueur - mais cette information est inutile ici )

ECFD est un parallélogramme donc  $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EF}$  ( cf. cours - Addition vectorielle - Méthode du parallélogramme )

ECFD est un parallélogramme donc DECF est un parallélogramme ( autre nom du même parallélogramme )

DECF est un parallélogramme donc  $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC}$  ( cf. cours - Addition vectorielle - Méthode du parallélogramme )



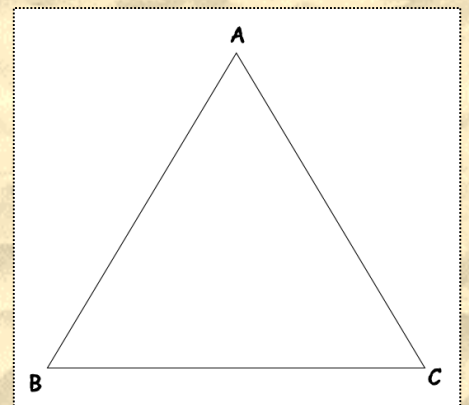
➤ **Exercice 7 :** Brevet des Collèges - Afrique - 1996

Construire un triangle équilatéral ABC de 5 cm de côté, puis placer sur la figure les points M et N tels que

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC}$$

Question supplémentaire ( non demandé au Brevet )

Montrer que B est milieu de [MN]



Solution :

Construction de M :

$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$  donc CAMB est un parallélogramme

Construction de N :

$\vec{BN} = \vec{AC}$  donc BNCA est un parallélogramme ( ou N est le translaté de B dans la translation de vecteur  $\vec{AC}$  )

Question supplémentaire - Position de B :

$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$  donc CAMB est un parallélogramme donc

$$\vec{MB} = \vec{AC}$$

De plus  $\vec{BN} = \vec{AC}$  ( hypothèse )

$$\text{Donc } \vec{MB} = \vec{BN}$$

Donc B est milieu de [MN]

