THEME 8

COMMENT DEMONTRER UNE EGALITE ?

Trois méthodes principales permettent de répondre à cette question.

Méthode 1 :

On transforme le premier membre pour obtenir le second membre.

Exemple :

Démontrer que
$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

Il suffit de considérer le premier membre et de le développer.
$(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$

Donc :
$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$
$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 2ab + 2ab = 4ab$

Nous venons de démontrer que :

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

Remarque :
Parfois, il est préférable de considérer le second membre et de le transformer afin d'obtenir le premier.

Méthode 2 :

On transforme simultanément les deux membres.

Exemple :

Démontrer que, quels que soient les nombres a, b , c et d :
$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

Développons chacun des deux membres.

1er membre :
$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2)$

$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2$

$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 \underline{+ 2abcd} + b^2d^2 + a^2d^2 \underline{- 2abcd} + b^2c^2$

$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

2ème membre :

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

Soit en changeant l'ordre des termes

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

En comparant les deux résultats, nous pouvons affirmer que :

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

▶ Méthode 3 :

On démontre que la différence des deux membres est nulle.

Un exemple sera étudié dans la suite des exercices.

Exercice 1 :

a)Vérifier les égalités suivantes :

$5^2 - 4^2 = 5 + 4$

$12^2 - 11^2 = 12 + 11$

$38^2 - 37^2 = 38 + 37$

b)Quelle conjecture peut-on faire ?

c)Démontrer ce résultat général.

Remarque :

Conjecture : Propriété qui semble vraie, mais qui n'est pas encore démontrée .

Exercice 2 : Au Moyen-Age

Dans le *Livre des nombres carrés* de Léonard de Pise en 1225, on trouve l'égalité

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

a)Démontrer cette égalité

b)Utiliser cette égalité pour écrire 13 x 41 sous la forme d'une somme de deux carrés.

c)Même question avec 82 x 50 .

Exercice 3 :

Montrer que tout nombre impair est la différence des carrés de deux nombres consécutifs.

Par exemple 9 est la différence des carrés des deux entiers consécutifs 4 et 5 : $9 = 5^2 - 4^2$

Exercice 4 : Carrés parfaits

a)Vérifier que les nombres suivants sont des carrés parfaits (un carré parfait est le carré d'un nombre entier)

$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1$

$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1$

$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1$

b) On se propose d'étudier le cas général :

« Lorsque l'on augmente de 1 le produit de quatre nombres consécutifs, obtient-on un carré parfait ? »
Soit n un entier . On pose a = n(n + 3)
Vérifier que $(n+1)(n+2) = a + 2$
Exprimer $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ en fonction de a et conclure.

Exercice 5 :

Choisir deux nombres non nuls.
Calculer le carré de leur somme, puis retrancher au nombre obtenu le carré de leur différence et enfin, diviser ce dernier résultat par leur produit.
Refaire le même calcul avec deux autres nombres.
Peut-on prévoir le résultat obtenu ? Justifiez.

Exercice 6 :

Développer :

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$$

Exercice 7 :

Vérifier que :

$$3 \times 4 \times 5 + 4 = 4^3$$
$$8 \times 9 \times 10 + 9 = 9^3$$

Montrez que le produit de trois entiers consécutifs augmenté du nombre du milieu est un cube parfait (c'est à dire le cube d'un entier)
Est-ce toujours vrai ?

Exercice 8 :

Calculez $x^2 - (x+1)(x-1)$ pour x = 5 , puis pour x = 2,3.
Que constatez-vous ? Justifiez.
Effectuez alors ce calcul pour x = 1234567890 .

Exercice 9 :

Montrez les égalités :
$2^2 + 2 = 3^2 - 3$
$3^2 + 3 = 4^2 - 4$
$20^2 + 20 = 21^2 - 21$
Enoncez un résultat général, puis démontrez le.

Exercice 10 :

Démontrer que, quel que soit l'entier positif n, le triangle de côtés

$$2n + 1 \ , \ 2n(n+1) \text{ et } 2n(n+1) + 1$$

est rectangle.

Exercice 11 : Des multiples de 3

a)Vérifier que les nombres suivants sont des multiples de 3 :

$$2^3 - 2 \quad ; \quad 5^3 - 5 \quad ; \quad 7^3 - 7$$

b)Factoriser $n^3 - n$ et en déduire un résultat général .

Exercice 12 :

Vérifier, généraliser et prouver :

$$1^2 + 2^2 = \frac{3^2+1}{2}$$
$$2^2 + 3^2 = \frac{5^2+1}{2}$$

$$3^2+4^2=\frac{7^2+1}{2}$$

Exercice 13 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{a^2}{a+1}-\frac{1}{a+1} \quad (a \neq -1) \quad ; \quad \frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2-1} \quad (a \neq 1 \text{ et } a \neq -1) \quad ;$$

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}+\frac{2}{a^2-1} \quad (a \neq 1 \text{ et } a \neq -1)$$

Exercice 14 :

On diminue de 1 le carré d'un nombre impair. Montrer que ce nombre est toujours divisible par 8 .

Exercice 15 :

Montrez que, pour tout entier naturel n, le nombre $n^3 - n$ est divisible par 6.

Exercice 16 :

Ecrire A sous la forme d'une fraction : $\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{1}{a}}$

LES MACHINES CALCULENT BIEN, MAIS PRUDENCE

Considérons l'expression suivante, où x et y sont des nombres quelconques (avec y différent de 0, un dénominateur ne pouvant être nul)

$$\frac{x+y-x}{y}$$

Calculons cette expression pour $x = 10^9$ et $y = 10^{-9}$
Deux types de réactions sont possibles !

- Tout d'abord, la réaction de l'élève qui n'est pas esclave de sa machine et qui conclura immédiatement :

$$\frac{x+y-x}{y}=\frac{x-x+y}{y}=\frac{y}{y}=1$$

- Autre réaction, utiliser sa machine. Mais au lieu de 1, l'élève pourra obtenir la valeur fausse 0 (résultat dépendant de la qualité , de l'âge de la machine et principalement de son prix)

Pourquoi ? Parce que la machine a négligé un milliardième (10^{-9}) devant un milliard (10^9),ce qui apparemment ne semble pas très grave, mais alors :

$$x+y=10^9+10^{-9}=10^9$$
$$x+y-x=10^9-10^9=0$$

et enfin :

$$\frac{x+y-x}{y}=\frac{0}{10^9}=0 \quad !!!!!!!!!!!!!!!!$$