

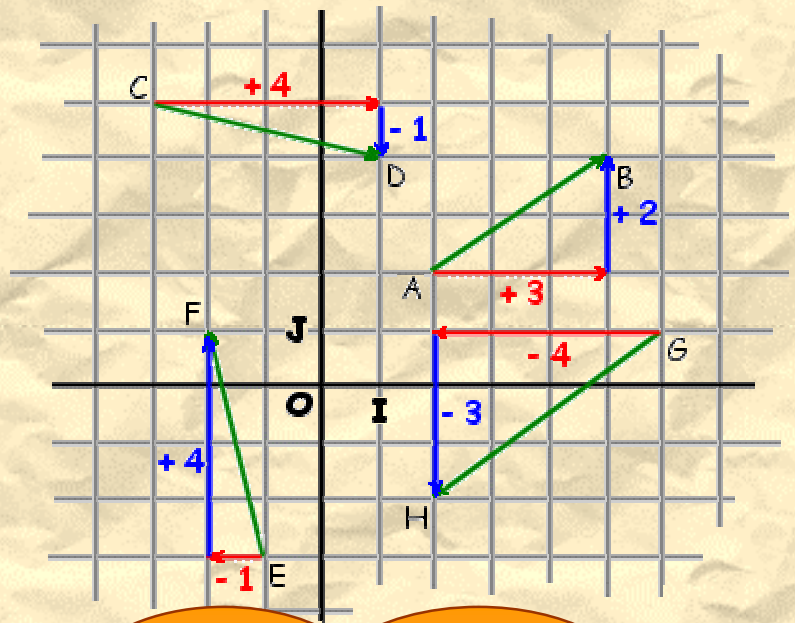
COURS 8

COMPOSANTES D'UN VECTEUR

Dans toute la suite de ce cours, nous considérerons le plan muni d'un repère (O, I, J) .
Sauf avis contraire, ce repère est quelconque.
Pour plus de facilité, nous présenterons les différentes propriétés dans un repère orthonormal.

Introduction :

Considérons, dans un repère (O, I, J) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.



Cas du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Pour «aller» du point A (origine du vecteur) au point B (extrémité du vecteur), nous devons :

- parallèlement à l'axe (OI), c'est à dire en suivant l'axe des abscisses, effectuer un déplacement vers la droite
(sens positif) de 3 unités,
- puis
- parallèlement à l'axe (OJ), c'est à dire en suivant l'axe des ordonnées, effectuer un déplacement vers le haut
(sens positif) de 2 unités.

Nous dirons que les composantes (ou les coordonnées) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3 ; 2)$ et nous noterons :

$$\overrightarrow{AB}(3;2)$$

► Cas du vecteur $\overrightarrow{CD}$:

Pour «aller» du point C (origine du vecteur) au point D (extrémité du vecteur) , nous devons :

- parallèlement à l'axe (OI), c'est à dire en suivant l'axe des abscisses, effectuer un déplacement vers la droite (**sens positif**) de **4** unités,
- puis
- parallèlement à l'axe (OJ), c'est à dire en suivant l'axe des ordonnées, effectuer un déplacement vers le bas (**sens négatif**) de **1** unités.

Par suite , les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont (4 ; - 1)

► Cas du vecteur $\overrightarrow{EF}$:

Pour «aller» du point E (origine du vecteur) au point F (extrémité du vecteur) , nous devons :

- parallèlement à l'axe (OI), c'est à dire en suivant l'axe des abscisses, effectuer un déplacement vers la gauche (**sens négatif**) de **1** unités,
- puis
- parallèlement à l'axe (OJ), c'est à dire en suivant l'axe des ordonnées, effectuer un déplacement vers le haut (**sens positif**) de **4** unités.

Par suite , les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont (- 1 ; 4)

► Cas du vecteur $\overrightarrow{GH}$:

Pour «aller» du point G (origine du vecteur) au point H (extrémité du vecteur) , nous devons :

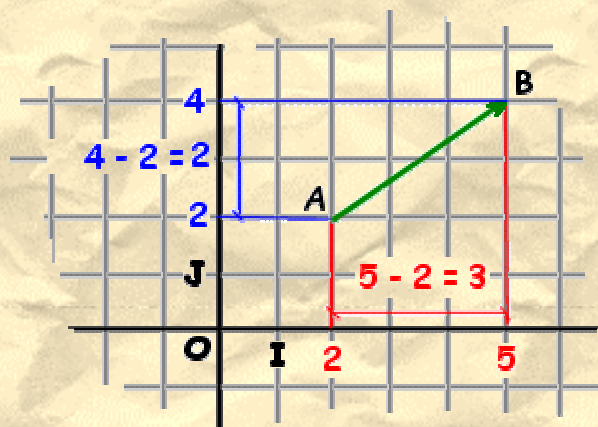
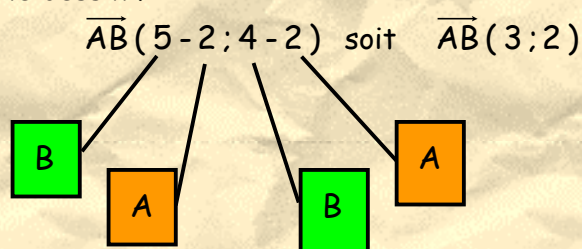
- parallèlement à l'axe (OI), c'est à dire en suivant l'axe des abscisses, effectuer un déplacement vers la gauche (**sens négatif**) de **4** unités,
- puis
- parallèlement à l'axe (OJ), c'est à dire en suivant l'axe des ordonnées, effectuer un déplacement vers le bas (**sens négatif**) de **3** unités.

Par suite , les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GH}$ sont (- 4 ; - 3)

Remarque : Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur à partir des coordonnées des deux points (extrémités) ?

Dans notre exemple, nous avons A (2 ; 2) et B (5 ; 4) .

Comment obtenir les coordonnées $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 2) que nous avons lues sur le dessin ?



Propriété :

Soit (O , I , J) un repère du plan

Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B).

Les composantes ou coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A)$$

Remarque :

Dans un repère, un point est déterminé par un couple de nombres appelé coordonnées. Par contre un vecteur est défini par un couple de nombres appelé composantes. Pour simplifier le vocabulaire, nous pourrions cependant utiliser le mot *coordonnées* pour un vecteur.

Attention cependant à certaines confusions possibles.

Autres notations :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad (\text{entre parenthèses}) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix} \quad (\text{un seul trait vertical})$$

Cette notation en colonne (avec des parenthèses ou avec un seul trait vertical), plus rigoureuse que la notation en ligne, est peu utilisée à notre niveau.

Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ présentés dans l'introduction ont pour composantes ou coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Si un point a pour coordonnées (3 ; - 2), le nombre 3 s'appelle l'abscisse du point et le nombre - 2 s'appelle l'ordonnée du point.

Par contre, si un vecteur a pour composantes ou coordonnées (2 ; 4), le nombre 2 s'appelle, non pas abscisse, mais première coordonnée (ou première composante) et le nombre 3 s'appelle, non pas ordonnée, mais seconde coordonnée (ou seconde composante).

Remarque :

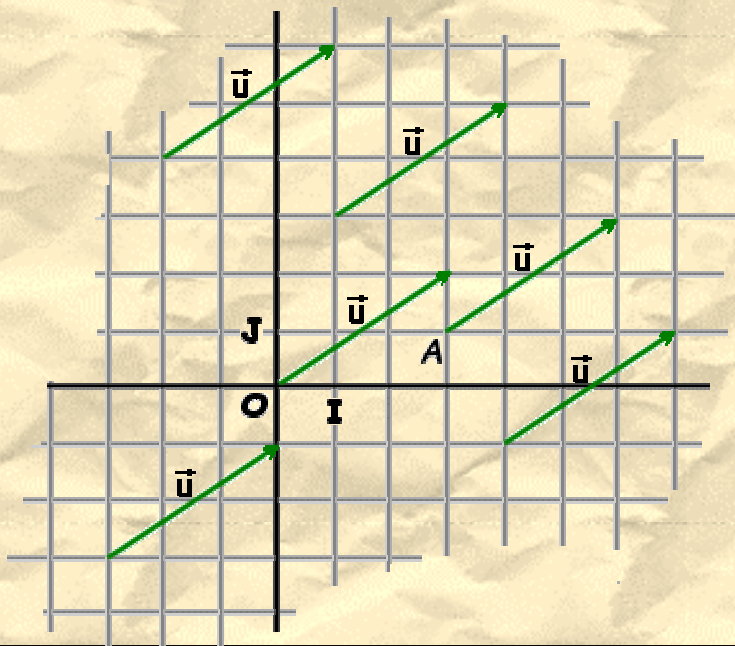
ATTENTION A L'ORDRE !

Remarque :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (3 ; 2). (Notation : $\vec{u}(3;2)$)

Alors que l'emplacement d'un point est parfaitement défini par ses coordonnées, comment tracer ce vecteur $\vec{u}$ dans un repère ?

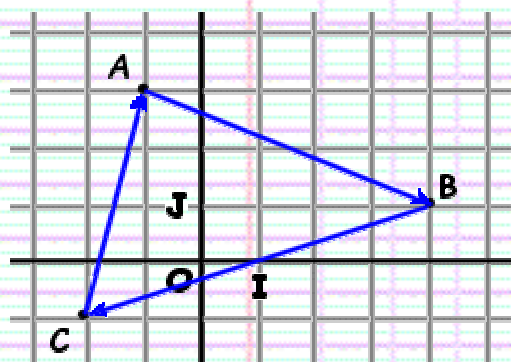
Contrairement à un point, un vecteur n'est pas un objet géométrique habituel. Il n'a pas d'emplacement défini comme un point. Le vecteur $\vec{u}$ peut donc être placé à tout endroit du plan. Comme le choix nous est laissé, nous pouvons également le lier au point O ou à tout autre point A intéressant pour la construction que nous désirons faire (cf. application 2 et application 3)



Exemple :

Soit, dans un repère (O, I, J), les points A (- 1 ; 3), B (4 ; 1) et C (- 2 ; - 1).

Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$?



Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} (4 - (-1); 1 - 3)$$

$$\overrightarrow{AB} (5; -2)$$

Coordonnées de $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} (-2 - 4; -1 - 1) \text{ soit } \overrightarrow{BC} (-6; -2)$$

Coordonnées de $\overrightarrow{CA}$:

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ou } \overrightarrow{CA} (1; 4)$$

Pas de signe d'égalité

►►► Toujours vérifier sur le dessin après (ou avant) le calcul !

Applications :

► Application 1 :

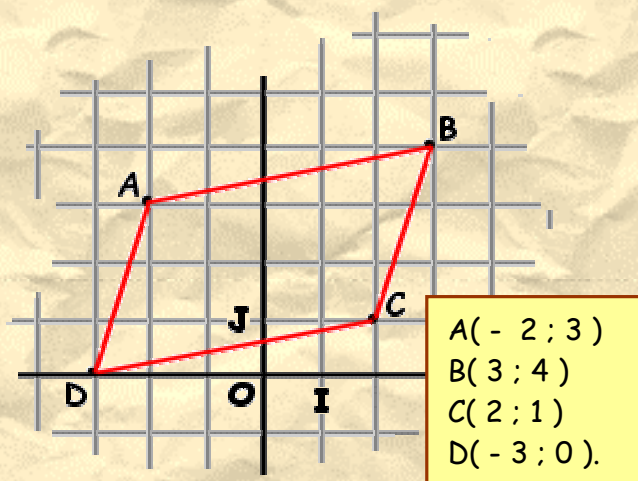
Soit, dans un repère (orthonormal) (O, I, J) , les points A, B, C et D de coordonnées :

$A(-2; 3)$, $B(3; 4)$, $C(2; 1)$ et $D(-3; 0)$.

Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, nous pouvons

- démontrer que les côtés opposés sont parallèles.
- démontrer que les diagonales ont même milieu.
-
- démontrer que deux vecteurs (bien choisis) sont égaux.



En utilisant cette dernière méthode, nous savons que :

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; ou $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; ou $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$) alors ABCD est un parallélogramme.

Rédaction :

► Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB}(3 - (-2); 4 - 3)$ soit $\overrightarrow{AB}(5; 1)$ (Vérifiez sur le dessin)

► Coordonnées de $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{DC}(2 - (-3); 1 - 0)$ soit $\overrightarrow{DC}(5; 1)$ (Vérifiez sur le dessin)

Nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (mêmes coordonnées)

Donc

ABCD est un parallélogramme.

► Application 2 :

Soit, dans un repère (orthonormal) (O, I, J) , le point A de coordonnées $(3, -1)$.

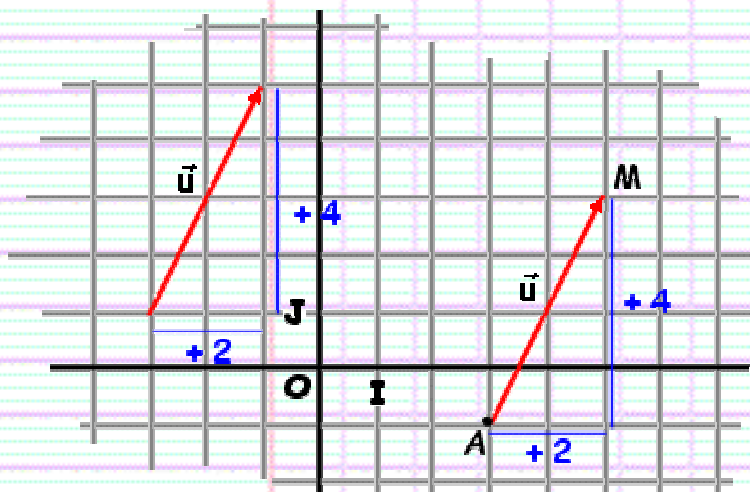
Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(2; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$

Il est préférable, dans cet exemple, de placer le vecteur $\vec{u}$ « à partir » du point A.

Nous désirons déterminer les coordonnées du point M. Pour l'instant ces coordonnées sont inconnues.

Nous les appellerons alors x et y.



Soient $(x; y)$ les coordonnées du point M.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$:

$\overrightarrow{AM}(x - 3; y - (-1))$ soit $\overrightarrow{AM}(x - 3; y + 1)$

Coordonnées du vecteur $\vec{u}$:

$\vec{u}(2; 4)$ (coordonnées données par le texte)

$\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ donc $x - 3 = 2$ et $y + 1 = 4$

donc $x = 2 + 3$ et $y = 4 - 1$

donc $x = 5$ et $y = 3$

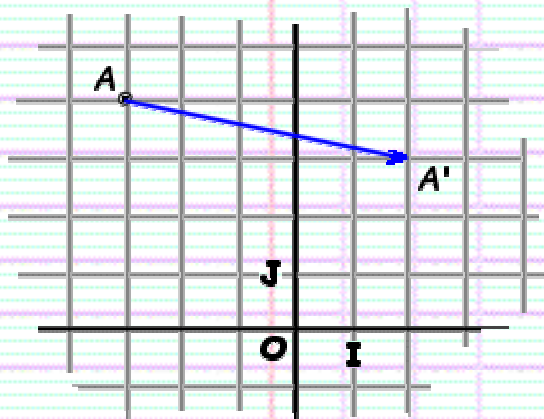
Les coordonnées du point M sont $M(5; 3)$

►►► Vérifiez sur le dessin

► Application 3 :

Soit, dans un repère (orthonormal) (O, I, J) , le point A de coordonnées $(-3; 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(5; -1)$;

Quelles sont les coordonnées de A' image de A dans la translation de vecteur $\vec{u}$?



Rédaction :

A' est l'image de A dans la translation de vecteur $\vec{u}$.

Donc $\vec{AA'} = \vec{u}$

Soient $(x; y)$ les coordonnées du point A' .

Coordonnées du vecteur $\vec{AA'}$:

$\vec{AA'}(x - (-3); y - 4)$ soit $\vec{AA'}(x + 3; y - 4)$

Coordonnées de $\vec{u}$: (données dans le texte)

$\vec{u}(5; -1)$

$$\begin{array}{lcl} \vec{AA'} = \vec{u} & \text{donc} & x + 3 = 5 \text{ et } y - 4 = -1 \\ & \text{donc} & x = 5 - 3 = 2 \text{ et } y = -1 + 4 = 3 \end{array}$$

Les coordonnées du point A' sont :

$A'(2; 3)$

►►► Vérifiez sur le dessin

Remarque :

Tous les problèmes de ce chapitre (détermination des coordonnées d'un point) auront une résolution qui suivra un plan commun :

Texte géométrique

Egalité vectorielle

Traduction à l'aide des coordonnées

A' est l'image de A dans la translation de vecteur $\vec{u}$.

donc

$\vec{AA'} = \vec{u}$

Soient $(x; y)$ les coordonnées du point A' .

$\vec{AA'}(x - (-3); y - 4)$ soit $\vec{AA'}(x + 3; y - 4)$

$\vec{u}(5; -1)$

$$\begin{array}{lcl} \vec{AA'} = \vec{u} & \text{donc} & x + 3 = 5 \text{ et } y - 4 = -1 \\ & \text{donc} & x = 5 - 3 = 2 \text{ et } y = -1 + 4 = 3 \end{array}$$

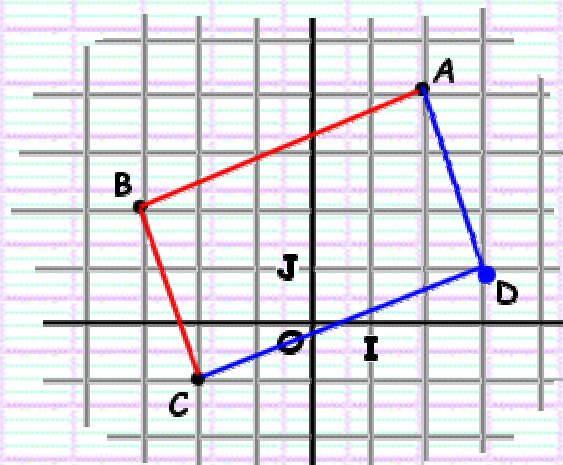
Les coordonnées du point A' sont : $A'(2; 3)$

► Application 4 :

Soient, dans un repère (orthonormal) (O, I, J) , les points A , B et C de coordonnées :

$A(2; 4)$, $B(-3; 2)$ et $C(-2; -1)$

Déterminer les coordonnées du point D afin que $ABCD$ soit un parallélogramme.



Coordonnées de $\overrightarrow{MA'}$:

Soient $(x; y)$ les coordonnées du point A' .

$$\overrightarrow{MA'}(x-1; y-2)$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'} \text{ donc } x-1=3 \quad \text{et} \quad y-2=-1$$
$$\text{donc } x=3+1=4 \quad \text{et} \quad y=-1+2=1$$

Les coordonnées du point A' sont :

$$A'(4; 1)$$

►►► Vérifiez sur le dessin

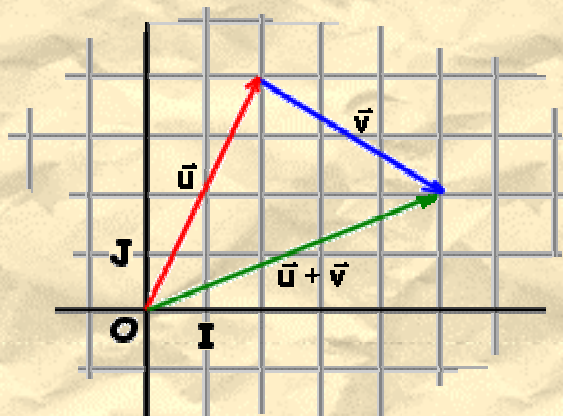
Propriété : Coordonnées de la somme de deux vecteurs :

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes (ou coordonnées)

$$\vec{u}(2; 4) \quad \vec{v}(3; -2)$$

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour composantes

$$\vec{u} + \vec{v}(2+3; 4+(-2)) \text{ soit } \vec{u} + \vec{v}(5; 2)$$



Propriété :

Soit (O, I, J) un repère du plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$.

Les coordonnées du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ sont :

$$\vec{u} + \vec{v}(x+x'; y+y')$$

► Application 6 :

Soient, dans un repère (orthonormal) (O, I, J) , les points A, B, C et D de coordonnées :

$$A(-1; 2); B(3; 1), C(1; -2) \text{ et } D(4; -1)$$

Déterminer les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}$

Rédaction :

(Texte géométrique) (Le problème fournit l'égalité vectorielle)

(Égalité vectorielle) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}$

(Traduction à l'aide des coordonnées)

Soient $(x; y)$ les coordonnées du point M .

Coordonnées de $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM}(x-(-1); y-2) \text{ soit } \overrightarrow{AM}(x+1; y-2)$$

Coordonnées de $\overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{BM}(x-3; y-1)$$

Coordonnées de $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}((x+1)+(x-3); (y-2)+(y-1))$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}(x+1+x-3; y-2+y-1) \text{ soit } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}(2x-2; 2y-3)$$

Coordonnées de $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{CD}(4-1; -1-(-2)) \text{ soit } \overrightarrow{CD}(3; 1)$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD} \text{ donc } 2x-2=3 \text{ et } 2y-3=1 \text{ donc } 2x=3+2 \text{ et } 2y=1+3$$

$$\text{donc } x = \frac{5}{2} \text{ et } y = \frac{4}{2} = 2$$

Les coordonnées du point M sont $(\frac{5}{2}; 2)$