THEME 8

COMPOSANTES D'UN VECTEUR
EXERCICES CORRIGES 1

Exercice 8 :

Le plan est muni d'un repère (O , I , J) . Soient les points: A(- 1 ; 3) , B(4 ; 2) , C(5 , 0) et D(3 ; - 1)

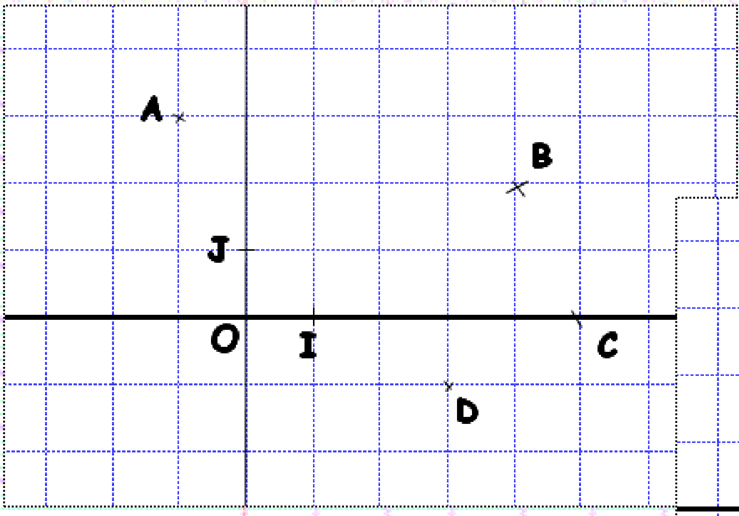
a)Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}$

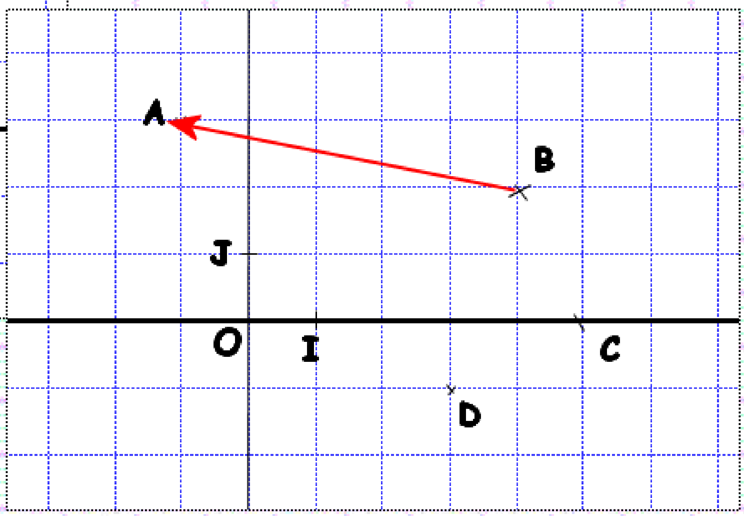
Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABDE ?

b)Calculer les coordonnées du milieu M du segment [EB] et les coordonnées du point F , symétrique de C par rapport à M . Quelle est la nature du quadrilatère ECBF ?

c)Montrer que $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AC}$.

Solution :





a)Calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}$:

$\overrightarrow{BA}(-1-4;3-2)$ soit $\overrightarrow{BA}(-5;1)$

Calcul des coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$

Soient (x ; y) les coordonnées du point E

➤ Coordonnées de $\overrightarrow{DE}$:

$\overrightarrow{DE}(x-3;y-(-1))$ soit $\overrightarrow{DE}(x-3;y+1)$

➤ Coordonnées de $\overrightarrow{BA}$:

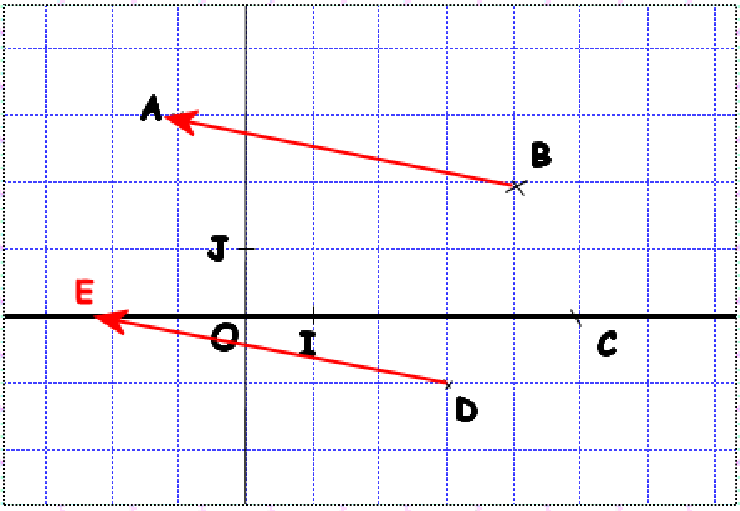
$\overrightarrow{BA}(-5;1)$ (question précédente)

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$ donc $x - 3 = -5$ et $y + 1 = 1$

donc $x = -5 + 3$ et $y = 1 - 1$

donc $x = -2$ et $y = 0$

Les coordonnées du point E sont E(- 2 ; 0)



Nature du quadrilatère ABDE :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$ donc DEAB (ou ABDE) est un parallélogramme

b)Calcul des coordonnées du milieu M du segment [EB] :

Les coordonnées du milieu M de [EB] sont :

$$M\left(\frac{4+(-2)}{2};\frac{2+0}{2}\right) \quad \text{soit} \quad M\left(\frac{2}{2};\frac{2}{2}\right) \quad \text{soit} \quad M(1;1)$$

Coordonnées du point F , symétrique de C par rapport à M :

F est le symétrique de C par rapport à M

donc

M est le milieu de [CF]

donc

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MF}$

- Coordonnées de $\overrightarrow{CM}$:

$\overrightarrow{CM}(1-5;1-0)$ soit $\overrightarrow{CM}(-4;1)$

- Coordonnées de $\overrightarrow{MF}$:

Soient (x; y) les coordonnées du point F

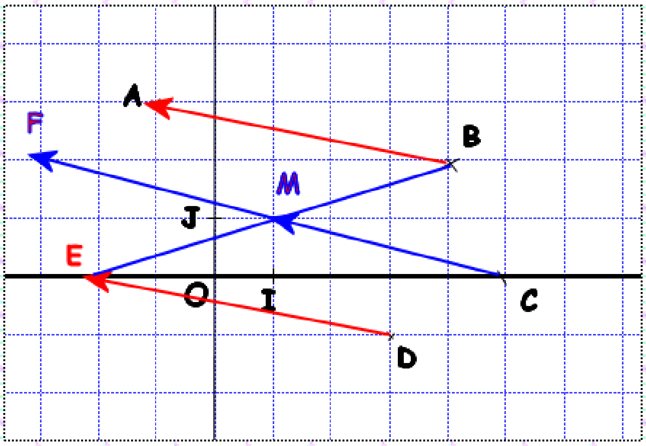
$\overrightarrow{MF}$ ($x - 1$; $y - 1$)

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MF}$ donc $x - 1 = -4$ et $y - 1 = 1$

donc $x = -4 + 1$ et $y = 1 + 1$

donc $x = -3$ et $y = 2$

Les coordonnées du point M sont M(- 3 ; 2)



Nature du quadrilatère ECBF :

Nous disposons de plusieurs méthodes pour démontrer que ECBF est un parallélogramme.

Méthode 1 :

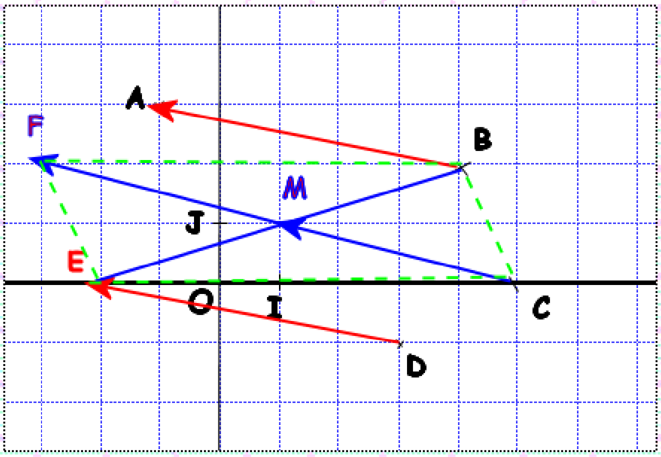
M est milieu de [BE] (question b)

M est milieu de [CF] (F est le symétrique de C par rapport à M)

Les diagonales du quadrilatère ECBF ont même milieu,

Donc ECBF est un parallélogramme .

Méthode 2 :



- Coordonnées de $\overrightarrow{EC}$:

$\overrightarrow{EC}(5-(-2), 0-0)$ soit $\overrightarrow{EC}(7;0)$

➤ Coordonnées de $\overrightarrow{FB}$:

$\overrightarrow{FB}$ (4 - (- 3) ; 2 - 2) soit $\overrightarrow{FB}$ (7 ; 0)

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FB}$ donc ECBF est un parallélogramme .

c) $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AC}$?

Plusieurs méthodes s'offrent encore à nous .

Méthode 1 :

Il suffit de calculer les coordonnées (composantes) des vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis de constater que ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

Méthode 2 :

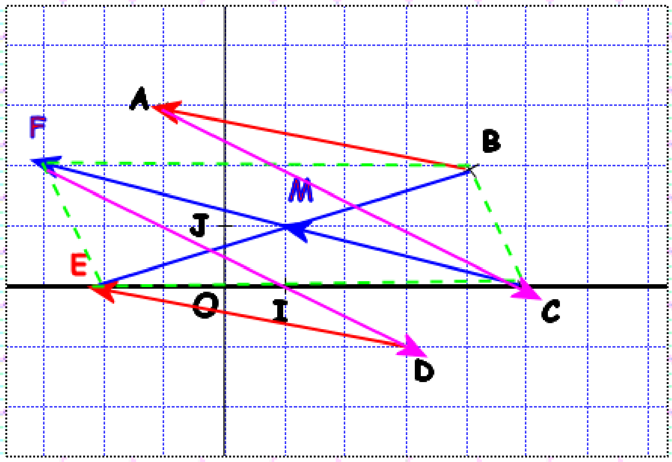
$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$ (Relation de Chasles)

Or $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ (ECBF est un parallélogramme – question b)

et $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$ (ABDE est un parallélogramme – question a)

Donc , par suite

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AC}$

Exercice 9 :

Le plan est muni d'un repère (O , I , J) .

Placer les points M(3 ; 5) , E(- 4 ; 6) et R(2 ; - 2).

a)Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{RE}$ puis les distances ME , MR et RE .

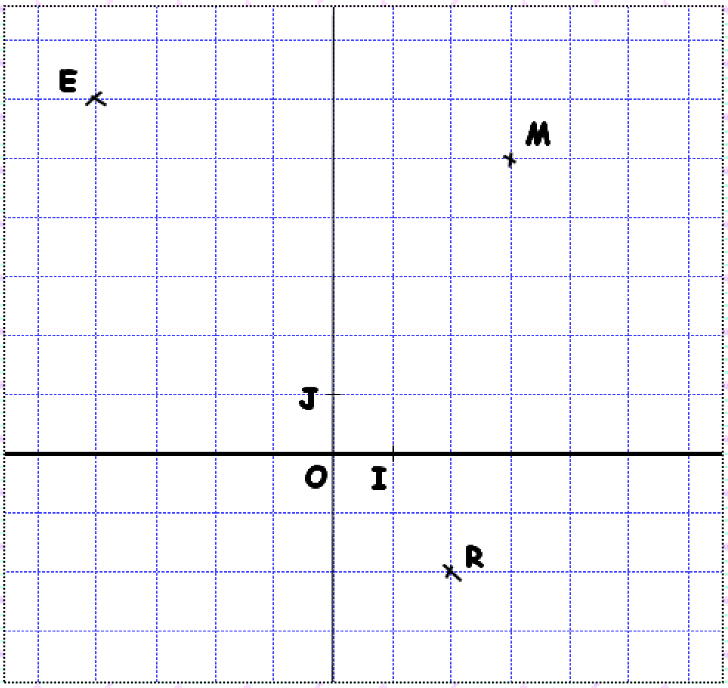
b)Quelle est la nature du triangle MER ? Pourquoi ? Donner la mesure de ses angles.

c)Calculer les coordonnées des points T et S tels que : $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{SR}$

Quelles sont les natures respectives des quadrilatères METR et MERS ?

Solution :

a)Calcul des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{RE}$:



$\overrightarrow{ME}$ (- 4 - 3 ; 6 - 5) soit $\overrightarrow{ME}$ (- 7 ; 1)

$\overrightarrow{MR}$ (2 – 3 ; - 2 – 5) soit $\overrightarrow{MR}$ (- 1 ; - 7)

$\overrightarrow{RE}$ (- 4 - 2 ; 6 – (- 2)) soit $\overrightarrow{RE}$ (- 6 ; 8)

Calcul des distances ME , MR et RE :

$ME^2 = (-4-3)^2 + (6-5)^2 = (-7)^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$

$ME = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\ \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$MR^2 = (2-3)^2 + (-2-5)^2 = 1^2 + (-7)^2 = 1 + 49 = 50$

$MR = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\ \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$RE^2 = (- 4 - 2)^2 + (6 - (- 2))^2 = (- 6)^2 + 8^2$

$RE^2 = 36 + 64 = 100$

$RE = \sqrt{100} = 10$

b) Nature du triangle MER :

➤ $ME = MR = 5\sqrt{2}$

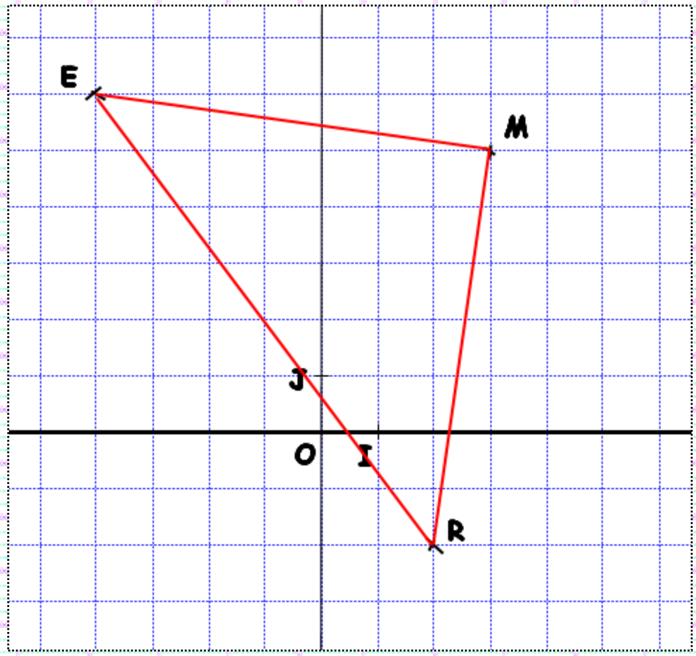
Donc le triangle MER est isocèle en M

➤ $RE^2 = 100$

$ME^2 + MR^2 = 50 + 50 = 100$

Donc $RE^2 = ME^2 + MR^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MER est rectangle en M



Mesure des angles du triangle MER.

L'angle $E\hat{M}R$ est un angle droit (MER est rectangle en M)

Le triangle MER est isocèle en M donc les deux angles à la base $M\hat{E}R$ et $M\hat{R}E$ ont même mesure.

Donc $M\hat{E}R = M\hat{R}E = \dfrac{180 - 90}{2} = \dfrac{90}{2} = 45$

c)Calcul des coordonnées des points T et S tels que : $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{SR}$

➤ $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{RT}$

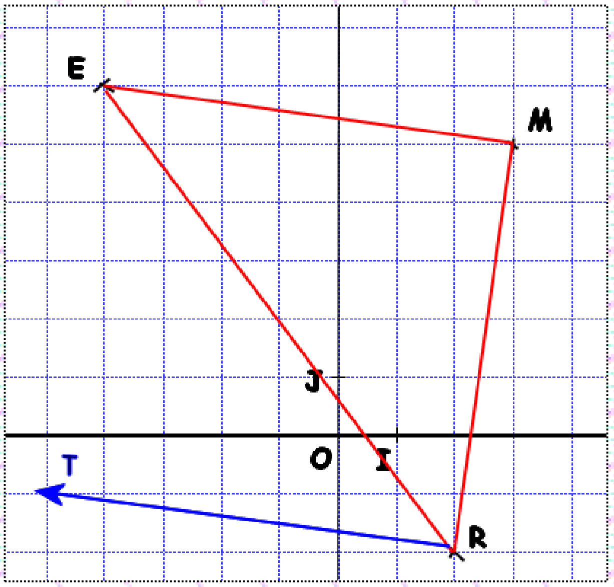
Composantes du vecteur $\overrightarrow{ME}$:

$\overrightarrow{ME}$ (- 7 ; 1) (question a)

Composantes du vecteur $\overrightarrow{RT}$:

Soient (x ; y) les coordonnées du point T

$\overrightarrow{RT}$ (x – 2 ; y – (- 2)) soit $\overrightarrow{RT}$ (x – 2 ; y + 2)



$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{RT}$ donc :

$x - 2 = -7$ et $y + 2 = 1$

$x = -7 + 2 = -5$ et $y = 1 - 2 = -1$

Les coordonnées de T sont T(- 5 ; - 1)

➤ $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{SR}$

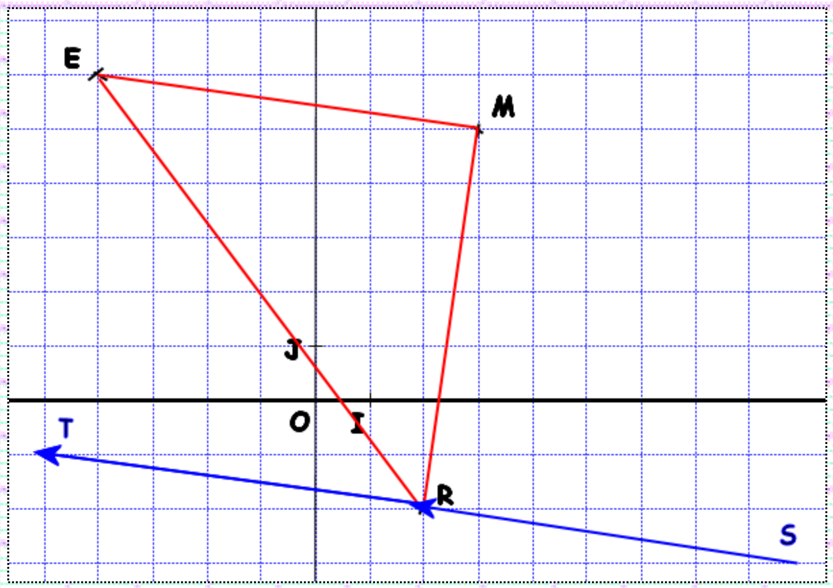
Composantes du vecteur $\overrightarrow{ME}$:

$\overrightarrow{ME}$ (- 7 ; 1) (question a)

Composantes du vecteur $\overrightarrow{SR}$:

Soient (x ; y) les coordonnées du point S

$\overrightarrow{SR}$ (2 – x ; - 2 - y)



$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{SR}$ donc :

$2 - x = -7$ et $-2 - y = 1$

$2 + 7 = x$ et $-2 - 1 = y$

$x = 9$ et $y = -3$

Les coordonnées de S sont S(9 ; - 3)

Natures respectives des quadrilatères METR et MERS :

Nature de METR :

$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{RT}$ donc METR est un parallélogramme.

$E\hat{M}R = 90°$ (question b)
donc le parallélogramme METR a un angle droit
donc METR est un rectangle .

ME = MR (question b)
Donc le parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur
Donc METR est un losange .

METR est à la fois un rectangle et un losange , donc METR est un carré .

Nature de MERS :

$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{SR}$ donc MERS est un parallélogramme.

Exercice 12 : d'après Brevet des Collèges - 1991

Soient A , B et D trois points du plan muni d'un repère orthonormal (O , I , J)

A(1 ; 4) , B(- 1 ; 8) et D(9 ; 8)

a)Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$?

b)Calculer les longueurs des segments [AB] , [AD] et [BD] .

c)Démontrer que le triangle ABD est rectangle en A .

d)Construire le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

e)Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle .

f)Déterminer les coordonnées du point C .

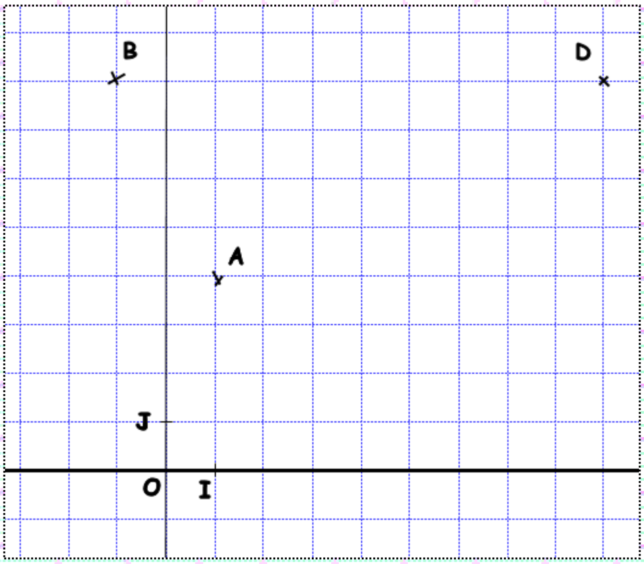
Solution :

a) Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$:

$\overrightarrow{AB}(- 1 - 1 ; 8 - 4)$ soit $\overrightarrow{AB}(- 2 ; 4)$

$\overrightarrow{AD}(9 - 1 ; 8 - 4)$ soit $\overrightarrow{AD}(8 ; 4)$

$\overrightarrow{BD}(9 - (- 1) ; 8 - 8)$ soit $\overrightarrow{BD}(10 ; 0)$



b)Calcul des longueurs des segments [AB] , [AD] et [BD] :

$AB^2 = (- 1 - 1)^2 + (8 - 4)^2 = (- 2)^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

$AB = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4}\ \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$AD^2 = (9 - 1)^2 + (8 - 4)^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$

$AD = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16}\ \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$BD^2 = (9 - (- 1))^2 + (8 - 8)^2 = 10^2 + 0^2 = 100 + 0 = 100$

$BD = \sqrt{100} = 10$

c)Nature du triangle ABD :

$BD^2 = 100$

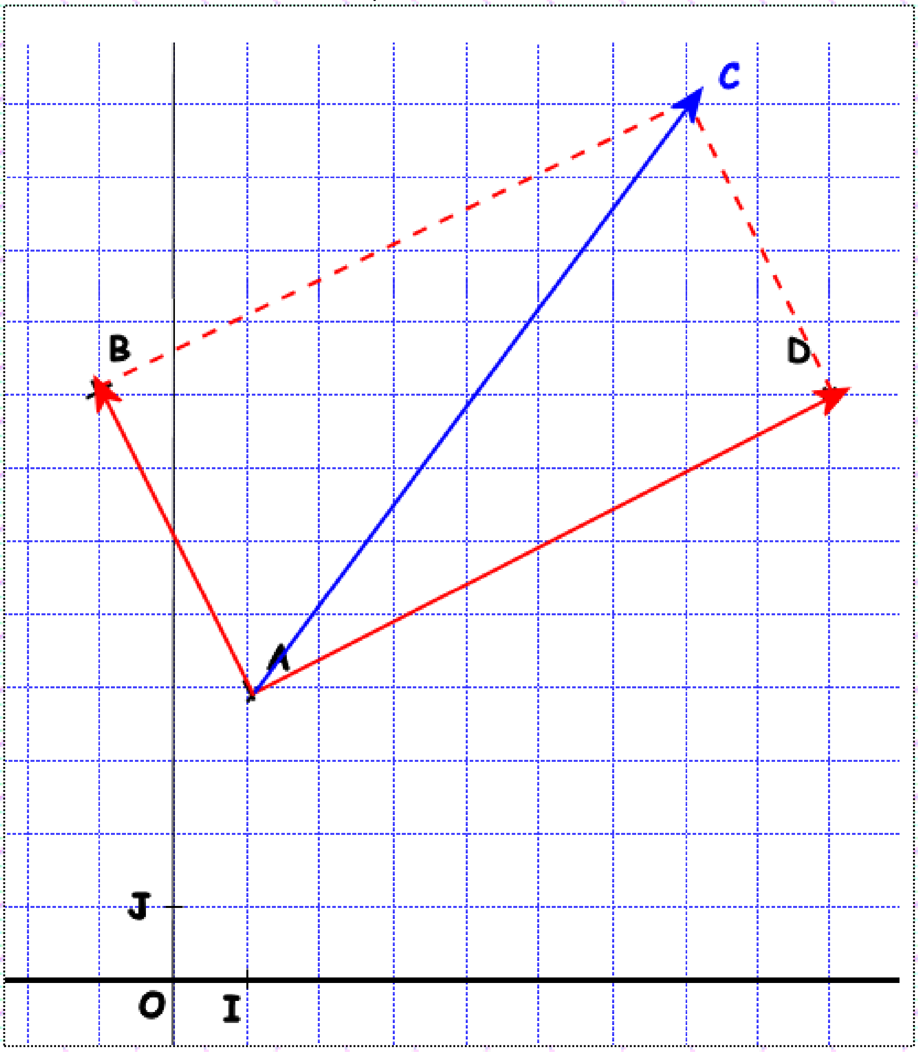
$AB^2 + AD^2 = 20 + 80 = 100$

Donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$

Donc , d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.

d)Construction du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc ABCD est un parallélogramme.
Connaissant 3 points du parallélogramme, il suffit de construire le quatrième.



e) Nature du quadrilatère ABCD :

➤ ABCD est un parallélogramme (cf. question précédente

➤ $\widehat{BAD} = 90°$ (ABD est un triangle rectangle en A – question c)

donc le parallélogramme ABCD a un angle droit.

donc ABCD est un rectangle

f) Coordonnées du point C :

Le point C est défini par :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Méthode 1 :

Soient (x ; y) les coordonnées du point C.

➤ Coordonnées de $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AC}(x - 1 ; y - 4)$

➤ Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$:

D'après la question a, nous avons :

$\overrightarrow{AB}(- 2 ; 4)$

$\overrightarrow{AD}(8 ; 4)$

donc

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}(- 2 + 8 ; 4 + 4)$

soit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}(6 ; 8)$

➤ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc

$x - 1 = 6$ et $y - 4 = 8$

$x = 6 + 1 = 7$ et $y = 8 + 4 = 12$

Les coordonnées du point C sont C(7 ; 12)

Méthode2 :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

donc ABCD est un parallélogramme

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

➤ Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB}(- 2 ; 4)$ (question a)

➤ Coordonnées de $\overrightarrow{DC}$:

Soient (x ; y) les coordonnées du point C.

$\overrightarrow{DC}(x - 9 ; y - 8)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc

$x - 9 = - 2$ et $y - 8 = 4$

$x = - 2 + 9 = 7$ et $y = 4 + 8 = 12$

Les coordonnées du point C sont C(7 ; 12)

Exercice 13 : Brevet des Collèges - Dijon - 1992

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O , I , J), on considère les points A(5 ; 0) , B(7 ; 6) , C(1 ; 4) et D(- 1 ; - 2) .

a)Faire une figure.

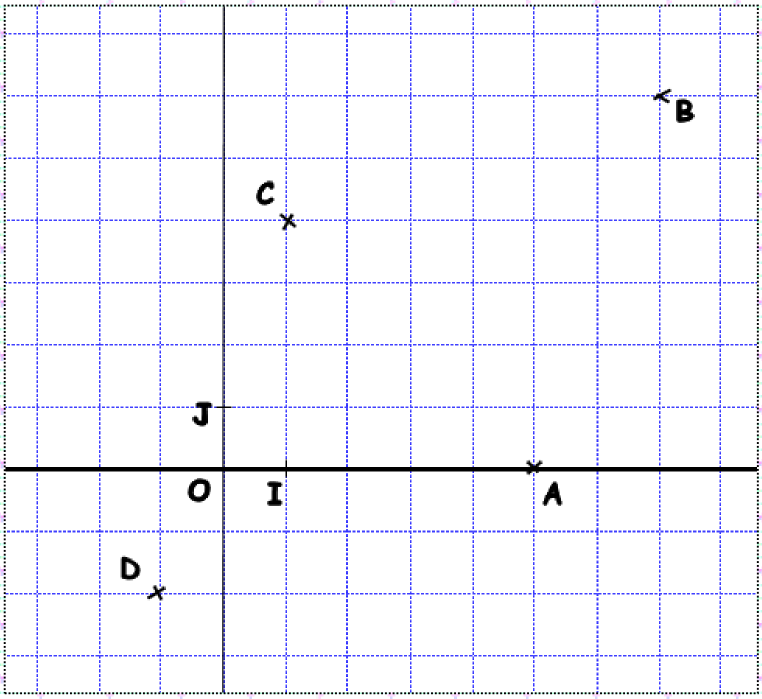
b)Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

c)Calculer les distances AB et AD .

d)Démontrer que ABCD est un losange .

Solution :

a)Figure :



b)Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{AB}(7 - 5 ; 6 - 0)$ soit $\overrightarrow{AB}(2 ; 6)$

$\overrightarrow{DC}(1 - (- 1) ; 4 - (- 2))$ soit

$\overrightarrow{DC}(2 ; 6)$

c)Calcul des distances AB et AD :

$AB^2 = (7 - 5)^2 + (6 - 0)^2$

$AB^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$

$AB = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

$AD^2 = (- 1 - 5)^2 + (- 2 - 0)^2$

$AD^2 = (- 6)^2 + (- 2)^2 = 36 + 4 = 40$

$AD = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

d)Nature de ABCD :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (question a)

donc ABCD est un parallélogramme.

$AB = AD = 2\sqrt{10}$

Le parallélogramme ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur

donc

ABCD est un losange .