

THEME 8

CONJECTURE DE SYRACUSE

Choisissez un nombre quelconque (nombre entier naturel).

- ▶ S'il est pair, divisez-le par 2.
- ▶ S'il est impair, multipliez-le par 3, puis ajoutez 1.

Si le nombre choisi est	pair	impair
Le résultat est	$\frac{n}{2}$	$3n + 1$

Répétez ce processus avec le résultat obtenu. Et ceci jusqu'à

Exemple :

Considérons par exemple le nombre 11

11 est impair donc nous devons le multiplier par 3, puis ajouter 1. Nous obtenons $3 \times 11 + 1$ soit 34.

Continuons.

34 est pair donc nous devons le diviser par 2. Nous obtenons 17. Continuons.

17 est impair donc nous devons le multiplier par 3, puis ajouter 1. Nous obtenons $3 \times 17 + 1$ soit 52.

Continuons.

52 est pair donc nous devons le diviser par 2. Nous obtenons 26. Continuons.

26 est pair donc nous devons le diviser par 2. Nous obtenons 13. Continuons.

.....

Pour éviter cette rédaction assez longue, disposons les calculs sous forme d'un tableau.

Etape n°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Résultat	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1	4	2	1

Remarquons que lorsque le résultat est égal à 1, nous obtenons une suite de nombres qui se répète(nt) indéfiniment (4 ; 2 ; 1). Nous pouvons donc arrêter dès que l'on trouve, comme résultat, le nombre 1.

A partir du nombre 11, nous obtenons une suite de nombres 11 ; 34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1. Cette suite de nombres s'appelle [la suite de Syracuse du nombre 11](#).

Exercice :

En utilisant comme ci-dessus un tableau, déterminez la suite de Syracuse des nombres 14 , 32 et (si vous avez du courage) de 27. Que constatez-vous ?

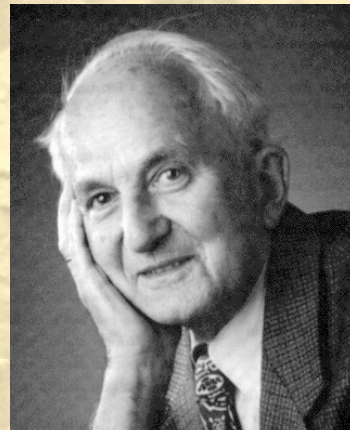
Conjecture :

La suite de Syracuse d'un nombre positif quelconque semble se terminer toujours par 1 !

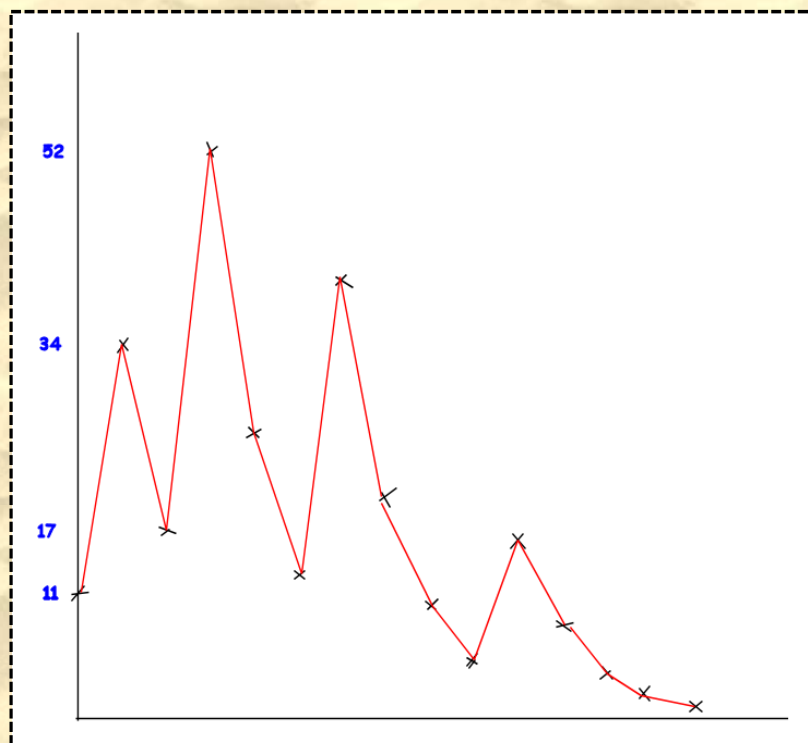
A ce jour, aucune démonstration n'a été trouvée par les mathématiciens.

Vers 1937, Lothar Collatz, mathématicien allemand, est à l'origine de ce problème appelé problème $3x+1$. Le présentant souvent lors de conférences, il intéressa le mathématicien Helmut Hasse qui le diffusa aux USA à l'université de Syracuse. Ce problème sans solution eut un grand succès et prit rapidement le nom de suite de Syracuse.

Un autre mathématicien s'y intéressa (Stanislas Ulam) et la conjecture prit le nom de conjecture d'Ulam, puis conjecture tchèque, ...



Lothar Collatz 1910 - 1990



Si nous représentons sous forme d'un graphique cette suite de nombres (en abscisse le numéro de l'étape et en ordonnée le nombre obtenu), nous avons pour le nombre 11 le graphique ci-contre. Nous nous apercevons que la suite de nombres peut augmenter, puis retomber, puis remonter ...

Ces différentes variations peuvent faire penser à une feuille emportée par le vent ou au vol d'un avion.

Les mathématiciens ont conservé cette image pour créer un vocabulaire très particulier.

► Le temps (ou la durée) de vol de la suite : C'est le numéro de l'étape qui donne le résultat (final) 1. C'est-à-dire, c'est le nombre de calculs qui permet d'arriver au nombre 1.

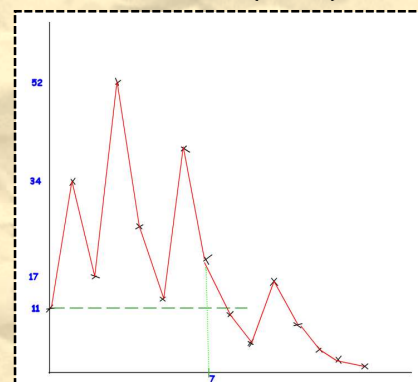
Dans notre exemple, le temps de vol du nombre 11 est 14

► L'altitude maximale : c'est la valeur maximale atteinte par la suite

Dans notre exemple, l'altitude maximale du nombre 11 est 52.

► Le temps de vol en altitude de la suite : C'est le nombre d'étapes donnant un résultat supérieur au nombre de départ. (cas d'un nombre impair)

Dans notre exemple, le temps de vol en altitude du nombre 11 est 7.



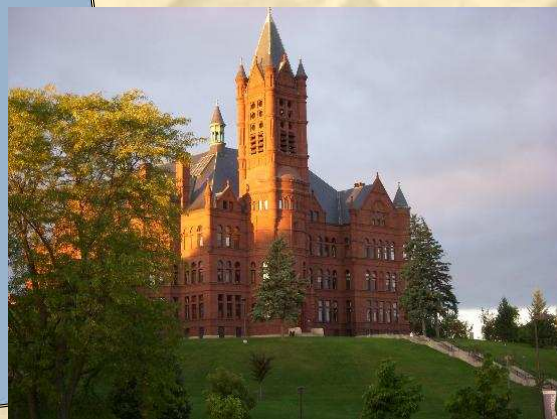
Remarque :

Il est facile de deviner le comportement de certains nombres. Par exemple, pour une puissance de 2 (2 , 4 , 8 , 16 , ...), à chaque étape, nous aurons un nombre pair jusqu'au dernier nombre 1 !

Par contre, certains nombres sont surprenants. Par exemple le nombre 27.

Pour ce nombre la durée de vol est de 111 (il faut donc 111 étapes pour arriver à 1). L'altitude maximale pour ce nombre est 9 232 ! et le temps de vol en altitude (nombres d'étapes avant de retrouver un résultat inférieur à 27) est de 95.

Un groupe d'internautes (projet BOINC nommé $3x+1@home$) s'est donné comme but de rechercher des nombres dont la suite de Syracuse est la plus longue possible. En 2008, ils ont découvert que le nombre 2.361.235.441.021.745.907.775 avait un temps de vol de 2284 (2284 étapes pour arriver à 1) (<http://www.boinc-af.org/content/view/897/215/>)



COMPLEMENT :

CONJECTURE DE SYRACUSE ET TABLEUR