THEME 8

DISTANCE DE DEUX POINTS DANS UN REPERE

LES COORDONNEES CARTESIENNES :

René Descartes (1596-1650)

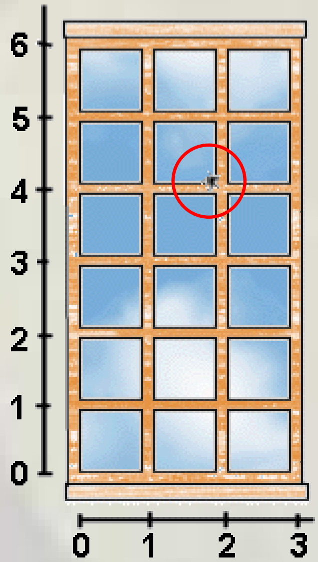
Philosophe, mathématicien, physicien et écrivain français. Dans une de ses œuvres, Discours de méthode, Descartes place le doute méthodique au centre de la pensée scientifique, l'amenant à faire table rase de toute connaissance non fondée. L'homme doit laisser les préjugées et les idées reçues pour tout vérifier, tout justifier. Son nom a donné, dans le langage courant, le nom « cartésien ». Avoir un esprit cartésien, c'est avoir un esprit méthodique, logique et rationnel.


DISCOVRS
DE LA METHODE
POVR BIEN CONDVIRE SA RAISON
PAR RENÉ DESCARTES
A PARIS,
M. DC. LXVIII.

Et j'avais toujours un extrême désir d'apprendre à distinguer le vrai d'avec le faux pour voir clair en mes actions et marcher avec assurance en cette vie.

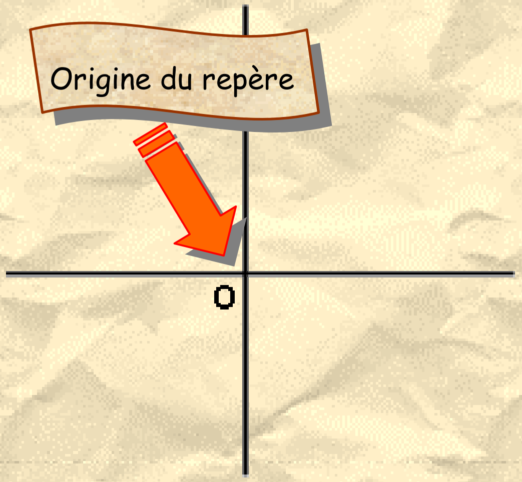
Descartes, Discours de la méthode

Un jour qu'il se reposait sur son lit, il observa une araignée qui se déplaçait sur les carreaux de sa fenêtre. A cette époque, les carreaux étaient assez petits.
Il se demanda alors comment il pourrait repérer la position de l'araignée.
Il eût alors l'idée d'utiliser les montants de bois horizontaux et verticaux. Ainsi, dans notre exemple, l'araignée se situe en 2 horizontal et 4 vertical. *(un peu comme la bataille navale !!!)*
Descartes venait ainsi de créer le **repère** que l'on appelle repère cartésien.
L'araignée était alors repérée par deux nombres 2 et 4 *(attention à l'ordre)* que l'on nomme coordonnées cartésiennes.
Ses travaux se poursuivant, il conçoit les bases d'une géométrie (appelée géométrie analytique) qui permet de résoudre des problèmes de géométrie à l'aide de calculs algébriques (calculs utilisant les quatre opérations, l'élévation à une puissance, la racine carrée, etc.). Un élément géométrique, comme le point, sera ainsi associé, dans cette nouvelle géométrie, à la donnée de coordonnées.
On lui doit également, entre autres, des recherches en optique.

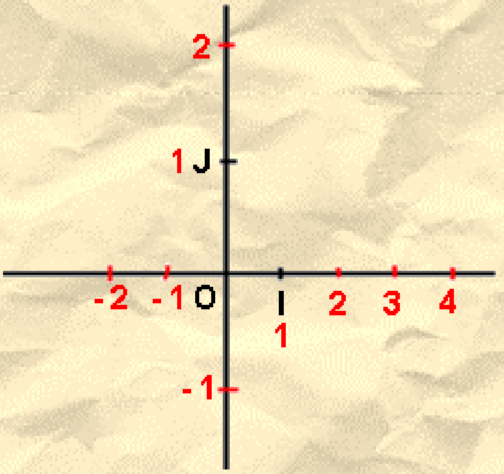


VOCABULAIRE :

Pour repérer un point M dans le plan, nous utiliserons deux axes (perpendiculaires) sécants en un point O appelé origine du repère.

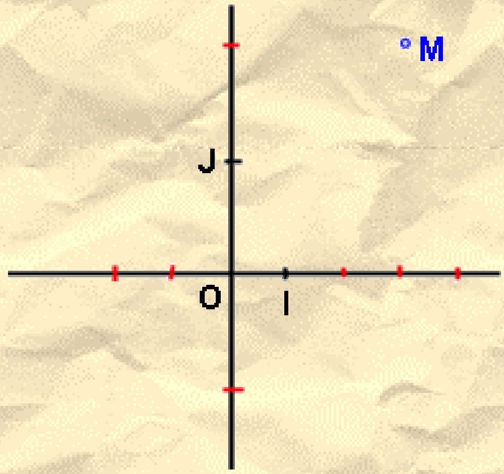


Sur chaque axe, nous choisirons une unité. Ces unités peuvent être différentes.
Ces unités vont nous permettre de graduer les deux axes.



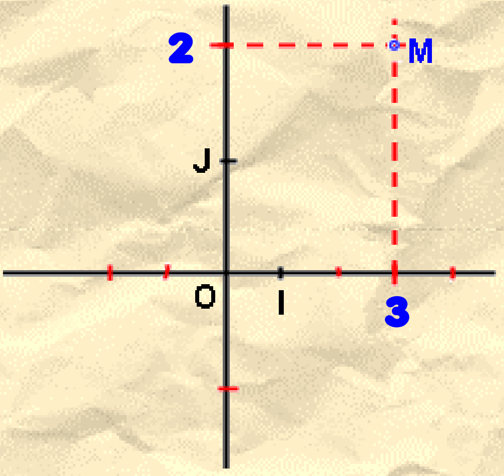
L'axe (OI) s'appelle axe des abscisses.
L'axe (OJ) s'appelle axe des ordonnées
Le triplet (O , I , J) s'appelle un repère (cartésien).

Remarque :
Lorsqu'il est demandé de dessiner un repère (O , I , J), seuls les points O , I et J sont nécessaires. Il n'est pas demandé d'inscrire les valeurs 1 , 2 , 3 , - 1 , etc.



Lecture des coordonnées d'un point M :

Par M, traçons une droite parallèle à l'axe (OJ). Cette droite coupe l'axe des abscisses (OI) en un point qui correspond à une graduation. Cette valeur est appelée abscisse du point M.
Par M, traçons une droite parallèle à l'axe (OI). Cette droite coupe l'axe des ordonnées (OJ) en un point qui correspond à une graduation. Cette valeur est appelée ordonnée du point M.



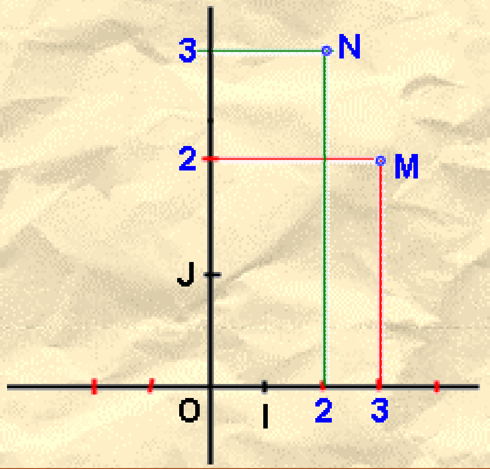
Dans notre exemple (dessin ci-contre), l'abscisse du point A est 3 et l'ordonnée du point A est 2 .
Nous regrouperons ces deux résultats sous forme d'un couple de nombres (3 ; 2) appelé coordonnées du point M.

Notations :

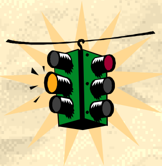
Pour préciser que le point M a pour coordonnées le couple (3 ; 2), nous écrirons :

M(3 ; 2)

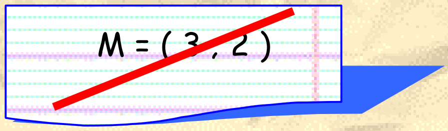
<u>Remarque :</u> L'ordre des nombres est très important. Le point de coordonnées (2 ; 3) est distinct du point M. Dans notre exemple, le point M a pour coordonnées (3 ; 2) tandis que le point N a pour coordonnées (2 ; 3).



Si le repère s'appelle (O , I , J) , la première coordonnée (abscisse du point) se lit sur l'axe des abscisses (OI) et la seconde coordonnée (ordonnée du point) se lit sur l'axe des ordonnées (OJ) .



Remarque : Ne pas écrire :



Pas de signe d'égalité. Un point n'est pas un couple de nombres.

Remarque : Très souvent le point virgule, qui sépare abscisse et ordonnée, est remplacé par une virgule.
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, cette simplification est acceptée.
Attention cependant, dans certains cas, il conviendra d'utiliser le point virgule.

Si un point R a pour abscisse 2,5 et 3, nous ne pouvons pas écrire R(2,5,3).
Avec cette notation, le point R a-t-il
comme abscisse 2,5 et comme ordonnée 3
ou comme abscisse 2 et comme ordonnée 5,3 ?
Il convient donc d'écrire, dans ce cas, R(2,5 ; 3).

Remarque : La convention adoptée le plus souvent est de dessiner la droite (OI), c'est à dire l'axe des abscisses, « horizontalement ». Attention, ce n'est pas systématique.

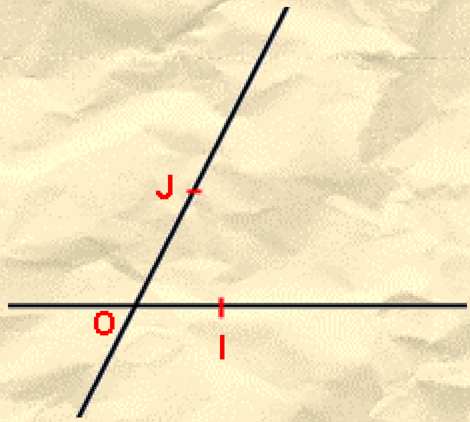
Remarque : Lorsqu'un point M est un point quelconque ou lorsque ses coordonnées sont des inconnues, une des conventions est de noter x ou x_M l'abscisse du point M et y ou y_M l'ordonnée du point M. Les lettres x et y sont accompagnées d'un indice pour associer ces valeurs au point M .
Lorsque deux points M et P sont utilisés, il est intéressant de noter (x_M ; y_M) les coordonnées du point M et (x_P ; y_P) les coordonnées du point P.
C'est pourquoi l'axe des abscisses s'appelle souvent l'axe des x et l'axe des ordonnées, l'axe des y .

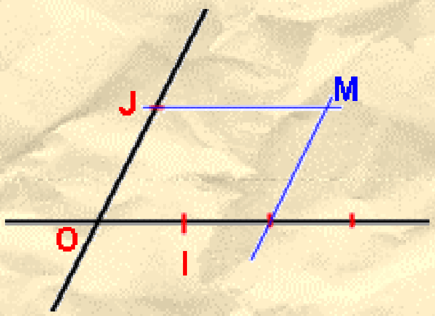
Remarque :
«Dans un plan muni d'un repère (O , I , J)» ou «Le plan est rapporté à un repère (O , I , J) »
Ces phrases qui débutent de nombreux problèmes accompagnant ce chapitre signifient que dans le plan dans lequel nous allons travailler, il faut considérer et tracer un repère (O , I , J).

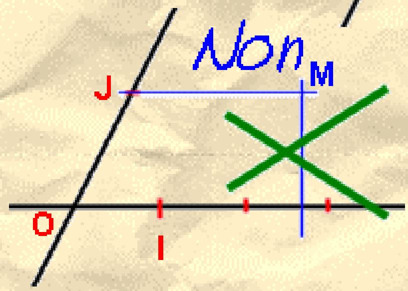
Remarque : Repère orthogonal – Repère orthonormal

- Lorsque les deux axes du repère sont perpendiculaires, le repère (O , I , J) est dit orthogonal.
- Lorsque les deux axes du repère sont perpendiculaires et lorsqu'en plus, OI = OJ (= 1), le repère est dit orthonormal (ou orthonormé).

Remarque : **Il existe donc des repères non orthogonaux ?**
Dans la définition donnée précédemment (niveau Collège) , il est précisé que les axes doivent être perpendiculaires. En fait, un repère est composé de deux axes non nécessairement perpendiculaires.
Attention à la lecture des points sur ce genre de repère !
Rappelons que pour lire les coordonnées d'un point M (ou placer ce point dans le repère), nous devons tracer par M, des parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées.





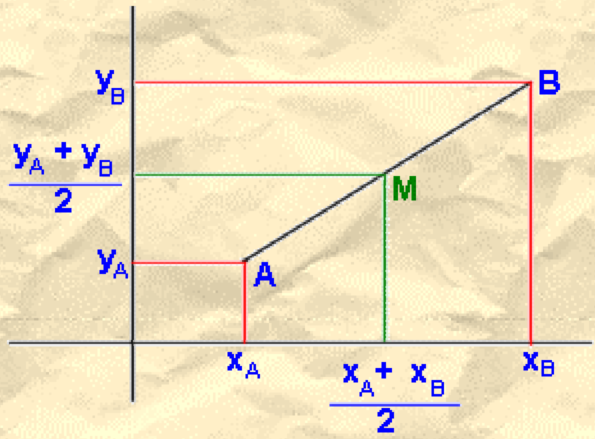


SAVOIR DETERMINER LES COORDONNEES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Propriété :

Le plan est rapporté à un repère (O , I , J).
Soient A et B deux points de coordonnées respectives (xA ; yA) et (xB ; yB).
Les coordonnées du point M, milieu du segment [AB] sont :

$$\boxed{\left(\frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; \frac{y_A + y_B}{2} \right)}$$



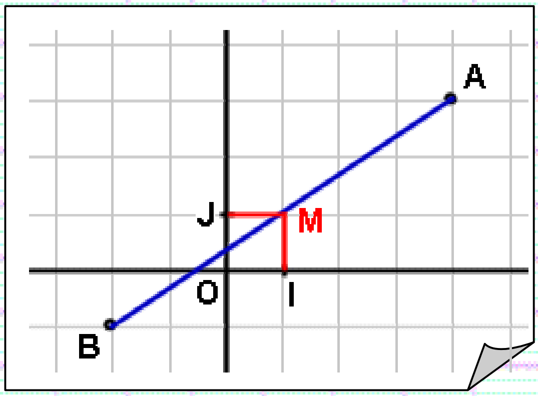
Propriété que nous pouvons également exprimer sous la forme suivante :
Le milieu M d'un segment [AB] a pour coordonnées :

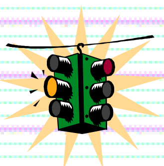
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemple :

Dans le plan muni d'un repère (O , I , J) orthonormal, on considère les points A et B de coordonnées respectives* (4 ; 3) et (- 2 ; - 1).
Déterminez les coordonnées du point M, milieu de [AB].

*respectives : Cet adjectif (au singulier respectif) signifie que l'on attribue dans l'ordre, au point A le premier couple de coordonnées (4 , 3) et à B le second couple de coordonnées (- 2 ; - 1). Nous évitons ainsi une répétition du type :
Soit A un, point de coordonnées (4 , 3) et soit B un point de coordonnées (- 2 ; - 1) .





Toujours faire un dessin.
Lorsque les coordonnées des points sont simples, le dessin qui ne constitue pas une démonstration, va cependant nous permettre de connaître les coordonnées de ce milieu M avant d'effectuer les calculs.
D'après le dessin , le point M semble avoir pour cordonnées (1 ; 1)
Les coordonnées du point M sont :

$$M\left(\frac{4 + (-2)}{2} ; \frac{3 + (-1)}{2} \right)$$

soit $M\left(\frac{4 - 2}{2} ; \frac{3 - 1}{2} \right)$

soit $M\left(\frac{2}{2} ; \frac{2}{2} \right)$ soit $\boxed{M (1 ; 1)}$

<u>Remarque importante :</u>
Nous retrouvons ce que nous pouvons lire sur le dessin. Ce qui est rassurant !

<u>Remarque :</u> Ne pas écrire avec des signes d'égalité :

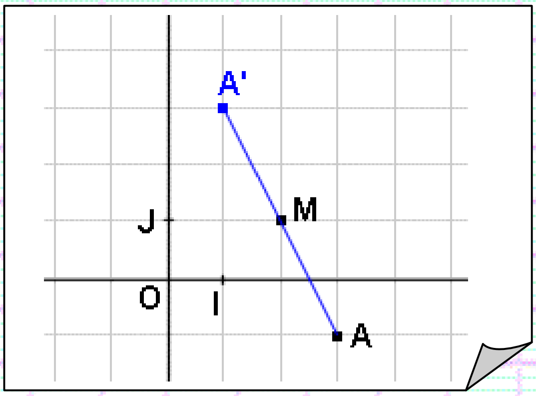
$$\left(\frac{4 + (-2)}{2} ; \frac{3 + (-1)}{2} \right) = \left(\frac{4 - 2}{2} ; \frac{3 - 1}{2} \right) = \left(\frac{2}{2} ; \frac{2}{2} \right) = (1;1)$$

SAVOIR DETERMINER LES COORDONNEES DU SYMETRIQUE D'UN POINT

Exemple :

Dans le plan muni d'un repère (O , I , J) orthonormal, on considère A et M deux points de coordonnées respectives (3 ; - 1) et (2 ; 1).
Déterminez les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport au point M.

Nous ne connaissons, à ce stade, qu'une seule propriété concernant les coordonnées du milieu d'un segment.
Nous allons donc dans un premier temps traduire cette situation géométrique.



A' est le symétrique de A par rapport au point M
Donc, par définition de la symétrie centrale, M est milieu du segment [AA']

Appelons (x ; y) les coordonnées du point A' .
Comme M est milieu de [AA'], nous avons (propriété du cours)

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$$

Remplaçons x_M , x_A , $x_{A'}$, y_M , y_A et $y_{A'}$ par les valeurs que nous connaissons. Nous obtenons :

$$2 = \frac{3 + x}{2} \quad \text{et} \quad 1 = \frac{-1 + y}{2}$$

Il suffit maintenant de résoudre ces deux équations , l'une où l'inconnue est x , l'autre où l'inconnue est y.

$$2 \times 2 = 3 + x \quad \text{et} \quad 1 \times 2 = -1 + y$$

$$4 = 3 + x \quad \text{et} \quad 2 = -1 + y$$

$$4 - 3 = x \quad \text{et} \quad 2 + 1 = y$$

Enfin $x = 1$ et $y = 3$

Les coordonnées du point A' , symétrique de A par rapport au point M, sont (1 ; 3)

$\boxed{A' (1 ; 3)}$

Notons qu'il est souhaitable de contrôler le résultat sur le dessin.

SAVOIR DETERMINER SI UN QUADRILATERE EST UN PARALLELOGRAMME

Rappelons que :
Si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Exemple 1 :

Dans le plan muni d'un repère (O , I , J) orthonormal, considérons les points A(1 ; 1) , B(2 ; 2), C(5 , - 1) et D(3 ; - 2).
Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?

Les diagonales de ce quadrilatère ABCD sont [AC] et [BD].

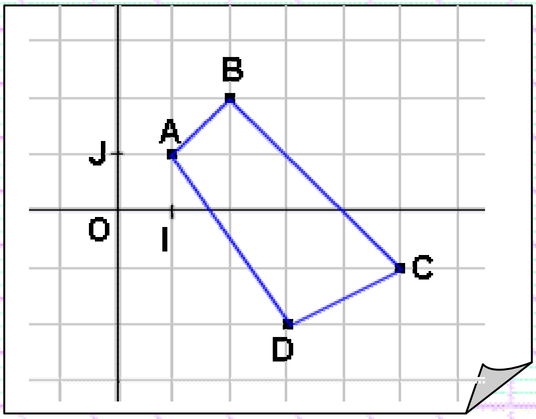
Déterminons les coordonnées des milieux de ces diagonales.

▶ Coordonnées du milieu M de [AC] :

$$M\left(\frac{1+5}{2};\frac{1+(-1)}{2}\right) \quad \text{soit} \quad M(3;0)$$

▶ Coordonnées du milieu M' de [BD] :

$$M'\left(\frac{2+3}{2};\frac{2+(-2)}{2}\right) \quad \text{soit} \quad M'\left(\frac{5}{2};0\right)$$



Les coordonnées de ces deux points étant différentes, les diagonales n'ont pas le même milieu, et par suite , ABCD n'est pas un parallélogramme.

ABCD n'est pas un parallélogramme.

Exemple 2 :

Dans le plan muni d'un repère (O , I , J) orthonormal, considérons les points

A(3 ; 5) , B(- 1 ; 3) , C(-2 ; - 1)

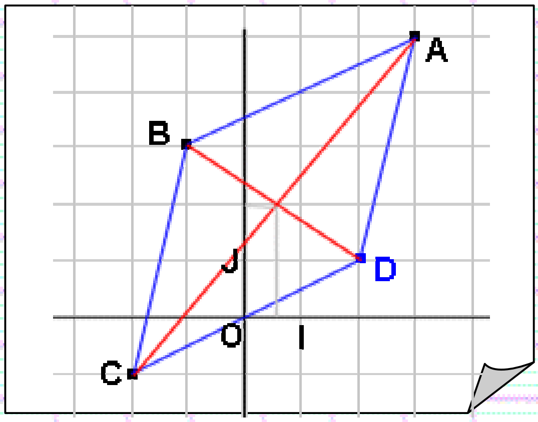
Déterminez les coordonnées du point D afin que ABCD soit un parallélogramme.

Pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme, les diagonales [AC] et [BD] doivent avoir même milieu.

Cherchons les coordonnées du milieu de [AC].

▶ Coordonnées du milieu de [AC] :

$$\left(\frac{3+(-2)}{2};\frac{5+(-1)}{2}\right) \quad \text{soit} \quad \left(\frac{1}{2};2\right)$$



Cherchons maintenant les coordonnées du milieu de [BD].

▶ Coordonnées du milieu de [BD] :

Comme les coordonnées du point D sont inconnues, nous les appellerons (x ; y)

Soient (x ; y) les coordonnées du point D.

Les coordonnées du milieu de [BD] sont

$$\left(\frac{-1+x}{2};\frac{3+y}{2}\right)$$

Comme les diagonales ont même milieu, les coordonnées de ces deux milieux sont identiques. Nous avons donc :

$$\frac{-1+x}{2}=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{3+y}{2}=2$$

donc

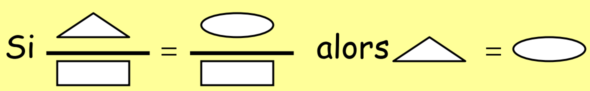
$$\begin{array}{lll} -1+x=1 & \text{et} & 3+y=2\times 2 \\ -1+x=1 & \text{et} & 3+y=4 \\ x=1+1 & \text{et} & y=4-3 \\ x=2 & \text{et} & y=1 \end{array}$$

Les coordonnées de D sont (2 ; 1)

D(2 ; 1)

Remarque :

Si deux fractions égales ont même dénominateur, alors les numérateurs sont égaux.



Nous retrouvons ce résultat sur le graphique.

Remarque :

Nous pouvions également chercher les coordonnées du milieu M de [AC], puis déterminer les coordonnées du symétrique de B par rapport à M.