THEME 8

CRITERES DE DIVISIBILITE

Comment savoir si une division va tomber « juste » sans faire cette division ?

Critère de divisibilité par 2 :

Propriété :

Un nombre (entier) est divisible par 2 s'il se termine par 0 , 2 , 4 , 6 ou 8 .

Remarque :

Un nombre (entier) divisible par 2 s'appelle un nombre pair. Un nombre qui n'est pas divisible par 2 est un nombre impair.

Exemples :

18 ; 256 ; 54 ; 1 452 ; 2 040 sont divisibles par 2 . Ce sont des nombres pairs .

27 ; 875 ; 4 203 ne sont pas divisibles par 2 . Ce sont des nombres impairs .

Remarque : Reste de la division par 2

Dans une division (euclidienne) par 2, le reste qui doit être inférieur à 2 est soit 0 , soit 1.

Si le nombre est divisible par 2, c'est à dire s'il se termine par 0 ,2 ,4 ,6 ou 8 , le reste de la division est 0.

Si le nombre se termine par 1 , 3 , 5 , 7 ou 9 , le reste de la division par 2 est 1.

Par exemple, le reste de la division par 2 de 34 578 est 0, tandis que le reste de la division par 2 de 78 423 est 1.

Critère de divisibilité par 5 :

Propriété :

Un nombre (entier) est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 .

Exemples :

Les nombres 385 ; 780 ; 24 165 sont divisibles par 5 .

Remarque : Reste de la division par 5

Dans une division (euclidienne) par 5, le reste qui doit être inférieur à 5 est soit 0 , soit 1 , soit 2, soit 3 ou soit 4.

Exemple 1 : Le nombre 34 723 n'est pas divisible par 5 puisqu'il ne se termine pas par 0 ou 5. Son reste dans la division par 5 n'est donc pas nul.
Mais nous constatons que 34 723 = 34 720 + 3 .
Le nombre 34 720 est divisible par 5 (34 720 = 5 x 6 944)
Nous pouvons donc écrire :

34 723 = 5 x 6 944 + 3

Le reste de la division par 5 de 34 723 est donc 3.

Exemple 2 : Le nombre 5 789 n'est pas divisible par 5. Quel est donc son reste ?
Le multiple de 5 le plus proche (par valeur inférieure) est 5 785.
Nous avons :

5 789 = 5 785 + 4 = 5 x 1 157 + 4

Le reste, dans la division par 5 de ce nombre, est donc 4.

Le reste de la division par 5 d'un nombre est le reste obtenu dans la division par 5 du dernier « chiffre » de ce nombre.

Exemples :
Le reste, dans la division par 5, de 1271 est le reste, dans la division par 5, de 1 : c'est à dire 1.
Le reste, dans la division par 5, de 75 847 est le reste, dans la division par 5, de 7 : c'est à dire 2.

Critère de divisibilité par 3 (par 9) :

Propriété :

Un nombre (entier) est divisible par 3 (par 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (par 9) .

Exemple :

Le nombre 438 est-il divisible par 3?
La somme de ses chiffres est :

4 + 3 + 8 = 7 + 8 = 15

Le nombre 15 étant divisible par 3 (car 15 = 3 x 5) , le nombre 438 est divisible par 3.

Remarque :

Nous pouvons " aller " plus loin avec cette méthode.
438 donne 15 comme somme de ses chiffres qui lui-même donne 6 comme somme (1 + 5) . Comme le nombre 6 est divisible par 3 , alors le nombre 438 est divisible par 3.

Exemple :

Le nombre 47 825 est-il divisible par 3?

➢ En procédant comme dans l'exemple précédent , nous avons :

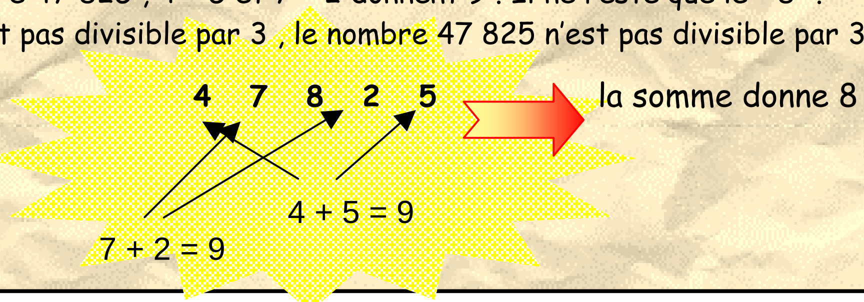
4 + 7 + 8 + 2 + 5 = 11 + 8 + 2 + 5 = 19 + 2 + 5 = 21 + 5 = 26

La somme des chiffres du nombre 26 donne :

2 + 6 = 8

Comme 8 n'est pas divisible par 3 , le nombre 47 825 n'est pas divisible par 3.

➢ Un autre moyen consiste à supprimer tous les chiffres dont la somme donne 9.
Dans le nombre 47 825 , 4 + 5 et 7 + 2 donnent 9 . Il ne reste que le " 8 ".
Comme 8 n'est pas divisible par 3 , le nombre 47 825 n'est pas divisible par 3.



Exemple :

Le nombre 27 351 est-il divisible par 9 ?

La somme des chiffres est

$$2 + 7 + 3 + 5 + 1 = 9 + 3 + 5 + 1 = 12 + 5 + 1 = 17 + 1 = 18$$

$$1 + 8 = 9$$

Comme 9 est divisible par 9, le nombre 27 351 est divisible par 9.

Remarque : Reste de la division par 3 (ou par 9)

Dans une division (euclidienne) par 3, le reste qui doit être inférieur à 3 est soit 0 , soit 1 ou soit 2.
Pour obtenir ce reste, il suffit de prendre le résultat obtenu en faisant la somme de tous les chiffres qui composent ce nombre.

Le reste de la division par 3 d'un nombre est le reste obtenu dans la division par 3 de la somme de tous les chiffres de ce nombre.

De même :

Le reste de la division par 9 d'un nombre est le reste obtenu dans la division par 9 de la somme de tous les chiffres de ce nombre.

Par exemple, dans l'exemple précédent, nous nous sommes aperçu que le nombre 47 825 n'est pas divisible par 3. La somme de tous ses chiffres donne 26 ou 8.

Le reste de la division de 47 825 par 3 est donc le reste de la division de 8 par 3 , soit 2. Et le reste de la division de 47 825 par 9 est le reste de la division de 8 par 9 , soit 8.

CONCLUSION :

Pour les critères de divisibilité par 2 et par 5, seul de dernier chiffre est important. Par contre pour les critères de divisibilité par 3 et 9, tous les chiffres sont à prendre en compte.

Un nombre (entier) est divisible par 2 s'il se termine par 0 , 2 , 4 , 6 ou 8 .
Un nombre (entier) est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 .
Un nombre (entier) est divisible par 3 (par 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (par 9) .

Autres critères de divisibilité

Critère de divisibilité par 4 :

Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Exemple :

Le nombre 63 724 est divisible par 4 car le nombre formé de ses deux derniers chiffres (24) est divisible par 4. Par contre, 4 444 426 n'est pas divisible par 4 (26 n'est pas divisible par 4)

Critère de divisibilité par 25 :

Un nombre est divisible par 25 si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est divisible par 25 , c'est à dire s'il se termine par 00, 25 ,50 ou 75

Exemple :

Le nombre 74 275 est divisible par 25, mais pas le nombre 5 555 .

Critère de divisibilité par 7 :

1[ère] méthode : le chiffre des unités

- Supprimons le chiffre **u** des unités du nombre donné.
  Exemple : le nombre donné est 341. On supprime 1 on obtient 34.
- On retranche du nombre obtenu le double de **u** .
  Exemple : 34 - 2 = 32

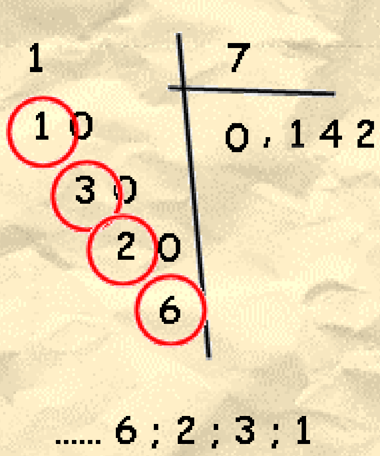
Le nombre initial est divisible par 7 si le nombre obtenu est divisible par 7.
Exemple : 32 n'est pas divisible par 7 donc 341 ne l'est pas non plus.

2[ème] méthode : Critère pour un grand nombre

Supposons que l'on veuille savoir si un nombre contenant un grand nombre de chiffres est divisible par 7. Il suffit de séparer ce nombre par tranche de 3 chiffres en partant des unités et d'insérer alternativement des – et des + entre les tranches à partir du début du nombre en commençant par un -. On effectue l'opération ainsi écrite et si le résultat est divisible par 7, alors le nombre considéré est divisible par 7.
Bien sûr pour voir si le résultat de l'opération précédente est divisible par 7, on peut utiliser la méthode de divisibilité par 7 exposée ci-dessus.
Exemple : Soit le nombre 5527579818992.
On le sépare par tranche de trois chiffres à partir des unités.
5 | 527 | 579 | 818 | 992.
On intercale alternativement des + et des - à partir du début en commençant par un -.
5 - 527 + 579 - 818 + 992.
On effectue l'opération ainsi écrite.
5 - 527 + 579 - 818 + 992 = 231
On regarde si 231 est divisible à l'aide de la méthode 1.
23 – 2 × 1 = 21 = 7 × 3
On trouve un résultat divisible par 7 donc 5527579818992 est divisible par 7.

3[ème] méthode : la clé de Pascal

- Construisons la suite de nombres associée à 7 que l'on appelle la clé de 7 :
  ...; 1 ; 5 ; 4 ; 6 ; 2 ; 3 ; 1.



Pour construire cette suite, on effectue la division de 1 par 7 , puis on écrit, à partir de la droite, la suite des restes obtenus.
- A partir du nombre initial :
  - multiplions le chiffre des unités par 1 (à partir de la droite, le premier nombre de la clé de Pascal).
  - multiplions le chiffre des dizaines par 3 (à partir de la droite, le premier nombre de la clé de Pascal).
  - multiplions le chiffre des centaines par 2
  - et ainsi de suite ...
- Additionnons les nombres obtenus.

Le nombre initial est divisible par 7 si la somme trouvée est divisible par 7.
Exemple : 3 479 est divisible par 7 car 1 x 9 + 3 x 7 + 2 x 4 + 6 x 3 = 56 et 8 x 7 = 56.

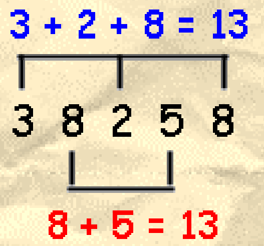
Conclusion :

Il est, souvent, préférable (et plus rapide) de faire la division par 7 et de constater si le reste est nul .

Critère de divisibilité par 11 :

1ère méthode :

Soit le nombre 38 258



Calculons la somme des chiffres de rang impair :

3 + 2 + 8 = 13

Calculons la somme des chiffres de rang pair :

8 + 5 = 13

Calculons la différence :

13 – 13 = 0

Le nombre initial est divisible par 11 si le résultat est divisible par 11.

Le nombre 38 258 est divisible par 11 car 0 est divisible par 11.

2ème méthode : la clé de Pascal

- Construisons la suite de nombres associée à 11 que l'on appelle la clé de 11 :

  ...; 1 ; 10 ; 1 ; 10 ; 1 ; 10 ; 1.

Pour construire cette suite, on effectue la division de 1 par 11 , puis on écrit, à partir de la droite, la suite des restes obtenus.

A partir du nombre initial :

- multiplions le chiffre des unités par 1 (à partir de la droite, le premier nombre de la clé de Pascal).

- multiplions le chiffre des dizaines par 10 (à partir de la droite, le premier nombre de la clé de Pascal).
- multiplions le chiffre des centaines par 1
- et ainsi de suite ...

- Additionnons les nombres obtenus.

Le nombre initial est divisible par 11 si la somme trouvée est divisible par 11.

Exemple : 512 303 est divisible par 11 car

3 x 1 + 0 x 10 + 3 x 1 + 2 x 10 + 1 x 1 + 5 x 10 = 77 et 7 x 11 = 77

Conclusion :

Il est préférable d'utiliser la première méthode.

Critère de divisibilité par 13 :

1ère méthode : le chiffre des unités

- Supprimons le chiffre **u** des unités du nombre donné.

  Exemple : le nombre donné est 131. On supprime 1 on obtient 13.

- Retranchons du nombre obtenu **9 u** .

  Exemple : 13 – 9 x 1 = 13 – 9 = 4

Le nombre initial est divisible par 13 si le nombre obtenu est divisible par 13.

Exemple : 4 n'est pas divisible par 13 donc 131 ne l'est pas non plus.

2ème méthode : la clé de Pascal

- Construisons la suite de nombres associée à 13 que l'on appelle la clé de 13 :

  ... ; 3 ; 12 ; 9 ; 10 ; 1

Pour construire cette suite, on effectue la division de 1 par 13 , puis on écrit, à partir de la droite, la suite des restes obtenus.

- A partir du nombre initial :
  - multiplions le chiffre des unités par 1 (à partir de la droite, le premier nombre de la clé de Pascal).
  - multiplions le chiffre des dizaines par 10 (à partir de la droite, le premier nombre de la clé de Pascal).
  - multiplions le chiffre des centaines par 9
  - et ainsi de suite ...
- Additionnons les nombres obtenus.

Le nombre initial est divisible par 13 si la somme trouvée est divisible par 13.

Exemple : 2 314 est divisible par 13 car

$4 \times 1 + 1 \times 10 + 3 \times 9 + 2 \times 12 = 4 + 10 + 27 + 24 = 65$ et $5 \times 13 = 65$

Conclusion :

Avec les outils que nous possédons actuellement (calculatrice, ordinateur) ce genre de critère n'a plus aucune utilité pratique.