THEME 8 :

PYRAMIDE ET CONE

AGRANDISSEMENT ET REDUCTION

SAVOIR CALCULER UN VOLUME :

Exercice 1 :

Un silo à grain est formé d'un cylindre de révolution de rayon 4,5 m et de hauteur 10 m surmonté d'un cône de révolution de 2,5 m de hauteur et de même rayon.
Calculer le volume de ce silo, arrondi au m^3.

Correction :

Volume du cylindre :

$V_{Cylindre} = \pi \times 4{,}5^2 \times 10 = \pi \times 20{,}25 \times 10 = \pi \times 202{,}5 = 202{,}5 \times \pi \approx 636{,}17 \text{ m}^3$

Volume du cône :

$V_{Cône} = \dfrac{\pi \times 4{,}5^2 \times 2{,}5}{3} = \dfrac{\pi \times 20{,}25 \times 2{,}5}{3} = \dfrac{\pi \times 50{,}625}{3} == \dfrac{\pi \times 3 \times 16{,}875}{3} = 16{,}875 \times \pi \approx 53{,}01 \text{ m}^3$

Volume du silo :

$V_{Silo} = V_{Cylindre} + V_{Cône} = 202{,}5\pi + 16{,}875\pi = 219{,}375\pi \approx 689 \text{ m}^3$

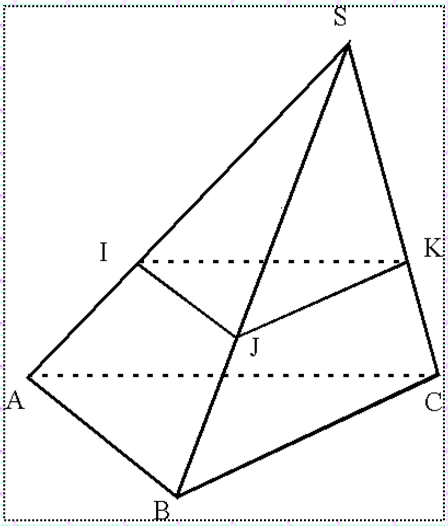
Ou

$V_{Silo} = V_{Cylindre} + V_{Cône} = 636{,}17 + 53{,}01 \approx 689 \text{ m}^3$

Le volume du silo est de 689 m^3

Exercice 4 :

Cette figure représente une pyramide en perspective.
On coupe cette pyramide par un plan parallèle au plan du triangle ABC.
La section obtenue est IJK.
On donne les dimensions suivantes :
AB = 6 cm ; BC = 9 cm ; AC = 12 cm ; IJ = 4 cm.
Construire la section IJK en vraie grandeur.



Correction :

Comme on coupe la pyramide par un plan parallèle à la base de cette pyramide, la section obtenue, c'est à dire le triangle IJK, est une réduction du triangle ABC.
Le coefficient (le rapport) de cette réduction est égal au rapport des longueurs de côtés associés. Le côté associé au côté [AB] est [IJ]. Connaissant les mesures de ces deux côtés, nous pouvons en déduire le coefficient de réduction :

$$\frac{IJ}{AB}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Par conséquent, puisqu'il y a proportionnalité entres les côtés du triangle ABC et IJK, nous avons :

$$JK = \frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}\times 9=\frac{2}{3}\times\frac{9}{1}=\frac{2\times 9}{3}=\frac{2\times\cancel{3}\times 3}{\cancel{3}}=6 \ \ (\text{cm})$$

$$IK = \frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\times 12=\frac{2}{3}\times\frac{12}{1}=\frac{2\times 12}{3}=\frac{2\times\cancel{3}\times 4}{\cancel{3}}=8 \ \ (\text{cm})$$

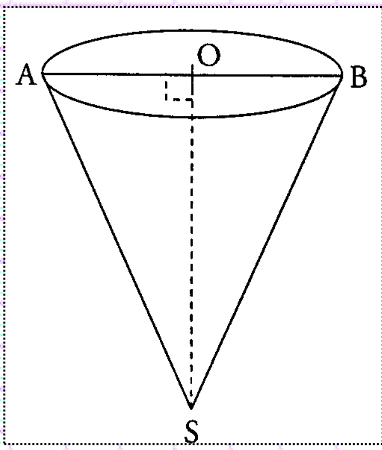
Il suffit donc de construire un triangle IJK vérifiant : IJ = 4 cm ; JK = 6 cm et IK = 8 cm
La construction de ce triangle est laissée au soin du lecteur.

Exercice 5 : Brevet des Collèges - Bordeaux - 1998

L'unité de longueur est le mètre.

Un réservoir d'eau a la forme d'un cône de révolution de sommet S, et de base le disque de centre O et de diamètre [AB].

AB = 5 et SA = 6,5



1) Calculer la valeur, arrondie au degré, de la mesure de l'angle $\widehat{OAS}$.
2) Démontrer que SO = 6.
3) a)Donner la valeur exacte du volume de ce réservoir.
   b)Montrer qu'une valeur approchée de ce volume au millième près est 39,270 m^3.
4) Calculer le temps nécessaire (en heures et minutes) pour remplir ce réservoir aux deux tiers de sa capacité, avec un robinet dont le débit est de 35 litres par minute.

Correction :

1) Mesure de l'angle $\widehat{OAS}$:

Dans le triangle OAS rectangle en O, nous avons :

$$\cos(\widehat{OAS}) = \frac{OA}{AS}$$

Comme $OA = \frac{AB}{2}$ = 2,5, nous avons :

$$\cos(\widehat{OAS}) = \frac{2,5}{6,5}$$

En tapant, sur la calculatrice, la séquence de touches suivante :

$\boxed{\cos^{-1}}\ \boxed{(}\ \boxed{2}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{6}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{5}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

nous obtenons :

$$\boxed{\widehat{OAS} \approx 67°}$$

2) Calcul de OS :

Dans le triangle OAS rectangle en O,
Nous avons, d'après le théorème de Pythagore :

$AS^2 = OS^2 + OA^2$

$6{,}5^2 = OS^2 + 2{,}5^2$

$42{,}25 = OS^2 + 6{,}25$

$42{,}25 - 6{,}25 = OS^2$

soit $OS^2 = 36$

donc $OS = \sqrt{36} = 6$ $\boxed{OS = 6 \text{ (m)}}$

3) a) Volume de ce réservoir :

Le réservoir est un cône. Son volume est donc :

$$V = \frac{\pi \times 2{,}5^2 \times \cancel{3} \times 2}{\cancel{3}} = \pi \times 6{,}25 \times 2 = \pi \times 12{,}5 = 12{,}5\,\pi$$ $\boxed{V = 12{,}5\,\pi \ (\text{m}^3)}$

b) Valeur approchée de ce volume au millième près :

$V = 12{,}5 \times \pi \approx 39{,}2699 \text{ m}^3$, soit au millième $\boxed{39{,}270 \text{ m}^3}$

4) Temps nécessaire pour remplir ce réservoir aux deux tiers de sa capacité, avec un robinet dont le débit est de 35 litres par minute :

Nous désirons remplir ce réservoir aux deux tiers de sa capacité. Quel volume d'eau est nécessaire ?

Le volume d'eau est :

$$V_{Eau} = \frac{2}{3} \times 39{,}270 = \frac{2 \times 39{,}27}{3} = \frac{78{,}54}{\cancel{3}} = 26{,}18 \ (\text{m}^3)$$

Ce volume représente 26 180 dm^3, soit 26 180 L

Le temps t nécessaire (en minutes) pour remplir ce réservoir est donc (35 litres par minute ou 35 L/min)

$$t = \frac{26180}{35} = 748 \text{ min}$$

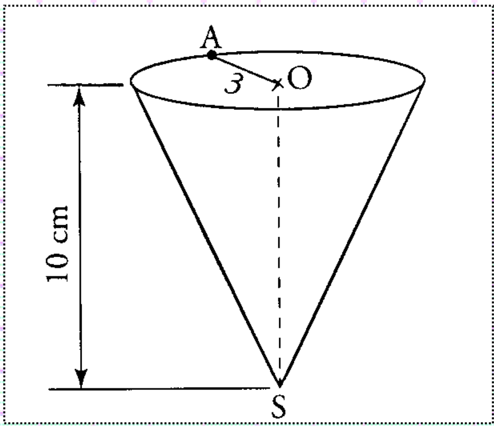
Soit en divisant 748 min par 60 (attention il faut faire une division euclidienne)

$788 \text{ min} = 12 \times 60 \text{ min} + 28 \text{ min} = 12 \text{ h} + 28 \text{ min}$

Le temps nécessaire est donc de $\boxed{12 \text{ h } 28 \text{ min}}$

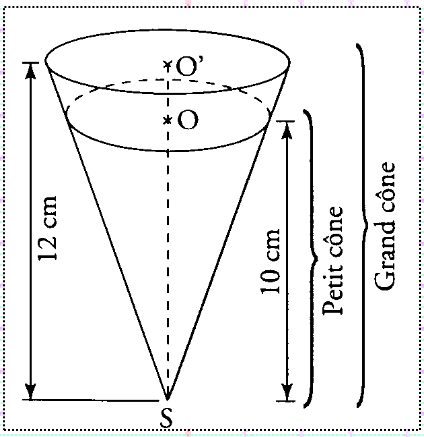
Exercice 6 : Brevet des Collèges – Lille – 1997

Un cornet de glace appelé « petit cône » a la forme d'un cône de hauteur SO = 10 cm, de rayon de disque de base OA = 3 cm. La représentation en perspective est donnée ci-contre.



1) Démontrer que le volume exact de glace contenue dans le « petit cône » (celui-ci étant rempli) est 30π cm^3.

2) Pour l'été, l'entreprise décide de fabriquer des « grands cônes », la hauteur d'un « grand cône » étant de 12 cm.



a) Le « grand cône » étant un agrandissement du « petit cône », calculer l'échelle d'agrandissement.

b) En déduire que le volume du « grand cône » est $51{,}84\,\pi$ cm^3.

c) Quelle quantité de glace supplémentaire a-t-on lorsqu'on achète un « grand cône » plutôt qu'un « petit cône » ?

On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur approchée à 1 centilitre prés.

Correction :

1) Volume du petit cône :

$$V_{\text{Petit Cône}} = \frac{\pi \times 3^2 \times 10}{3} = \frac{\pi \times \cancel{3} \times 3 \times 10}{\cancel{3}} = \pi \times 30 = 30\,\pi$$

2) a) Echelle d'agrandissement :

Le « grand cône » est un agrandissement du « petit cône ».

Le rapport, le coefficient de cet agrandissement qui est l'échelle d'agrandissement est égal à : (rapport de la hauteur du « grand cône » sur la hauteur du « petit cône »)

$\frac{12}{10}$ soit $\frac{6}{5}$ ou encore 1,2.

b) Volume du grand cône :

$V_{\text{Grand Cône}} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \times V_{\text{Petit Cône}}$ (ou $1{,}2^3 \times V_{\text{Petit Cône}}$)

$V_{\text{Grand Cône}} = 1{,}728 \times 30\,\pi = 51{,}84\,\pi$

c) Quantité de glace supplémentaire :

$51{,}84\,\pi - 30\,\pi = 21{,}84\,\pi \approx 68{,}6\,\text{cm}^3$

m^3			dm^3			cm^3			
			hL hectolitre	daL décalitre	L litre	dL décilitre	cL centilitre	mL millilitre	
							6	8,	6

La valeur exacte de glace supplémentaire est $21{,}84\,\pi\ \text{cm}^3$ et une valeur approchée à 1 centilitre prés est 7 cL (ou 6 cL)

SAVOIR FAIRE UN PATRON :

Exercice 3 : Brevet des Collèges – Nantes – 1998

1) Dessiner un carré ABCD dont les diagonales mesurent 4 cm.

Aucune justification n'est demandée.

2) Ce carré est la base d'une pyramide régulière SABCD telle que SA = 3 cm.

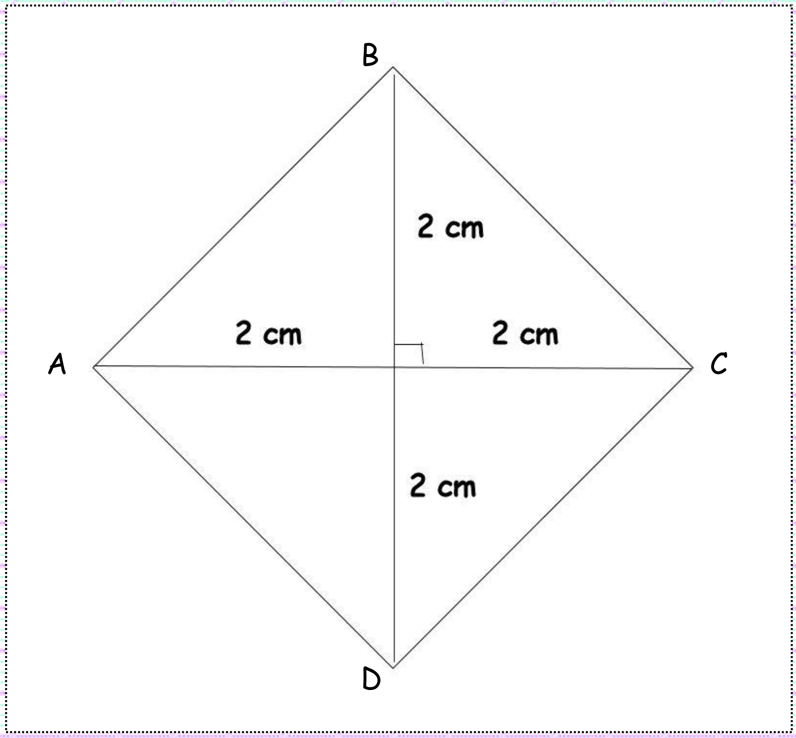
Compléter le dessin de la question 1 afin d'obtenir un patron de cette pyramide.

Correction :

1) Dessin du carré ABCD :

Les diagonales d'un carré ont même milieu, sont de même longueur et sont perpendiculaires.

Il suffit donc de tracer deux segments de même milieu, de 4 cm (2 fois 2 cm) et perpendiculaires



2) Patron de cette pyramide SABCD :