

THEME 8

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE, POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE ET D'UNE DROITE - TANGENTE

Inégalité triangulaire

Propriété :

Si A, B et C sont trois points du plan, alors
 $AC \leq AB + BC$

Remarquons que nous avons également, les points n'ayant pas de priorité :

$$AB \leq AC + CB$$

$$BC \leq BA + AC$$

Cette propriété s'appelle l'inégalité triangulaire. (du nom du dessin)

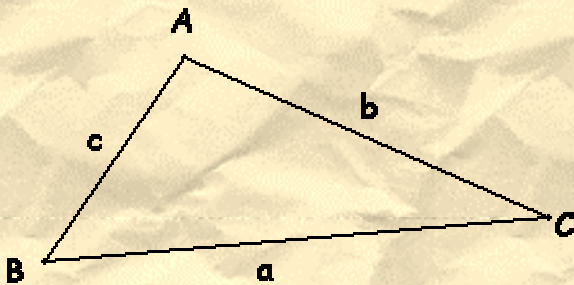
Autres façons de l'exprimer :

" Dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres."

Ou encore par :

" La plus courte distance entre deux points est la ligne droite. "

Remarque :



Dans un triangle dont les côtés mesurent a , b et c , nous avons :

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Dans un triangle ABC, la mesure du côté opposé au sommet A s'appelle souvent a , la mesure du côté opposé au sommet B s'appelle b et celle du côté opposé au sommet C s'appelle c.

Cas d'égalité :

Propriété :

A, B et C sont trois points du plan.

Si A , B et C sont alignés dans cet ordre, c'est à dire $B \in [AC]$, alors $AC = AB + BC$

Inversement

Si $AC = AB + BC$, alors $B \in [AC]$



Distance d'un point à une droite :

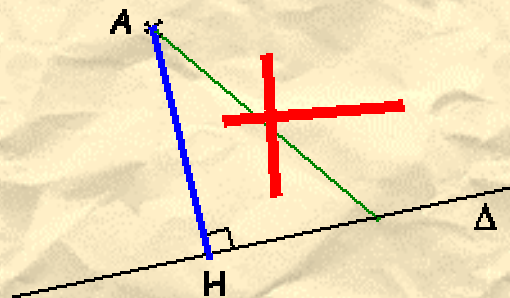
Définition et propriété :

Soit A un point et Δ une droite.

Soit H le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par A .

AH s'appelle la distance du point A à la droite Δ .

Cette distance est la distance minimale entre le point A et un point quelconque de la droite (H est le point de la droite Δ le plus proche de A)



Remarque :

Si A est un point de la droite, la distance de A à la droite est égale à 0.

Démonstration :

Soit A' le symétrique de A par rapport à la droite Δ et soit M un point quelconque de la droite Δ . Par définition de la symétrie axiale, la droite Δ est la médiatrice du segment $[AA']$.

$MA = MA'$ (M est un point de la médiatrice de $[AA']$)

$HA = HA'$ (H est un point de la médiatrice de $[AA']$ - H est même milieu de $[AA']$)

Considérons le triangle AMA' . Dans ce triangle, nous avons (inégalité triangulaire)

$$AA' \leq AM + MA'$$

Or $AA' = 2 \times AH$ ($HA = HA'$)

et $AM = MA'$

L'inégalité s'écrit donc :

$$2 \times AH \leq AM + AM$$

$$2 \times AH \leq 2 \times AM$$

Et par suite, quel que soit le point M sur la droite Δ :

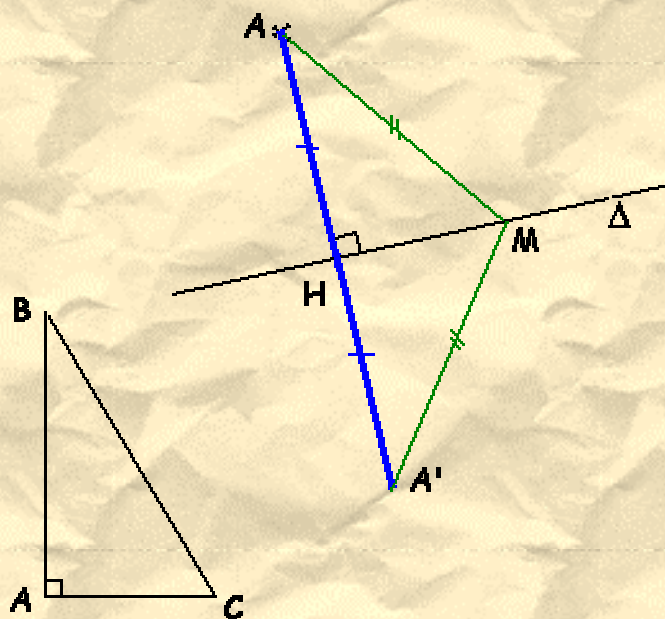
$$AH \leq AM$$

Remarque :

Dans un triangle rectangle, le côté le plus "long" est le côté opposé à l'angle droit, c'est à dire l'hypoténuse.

La distance de B à la droite (AC) est égale à BA .

Donc $BC > BA$



Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Rappels :

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$OM = R$$

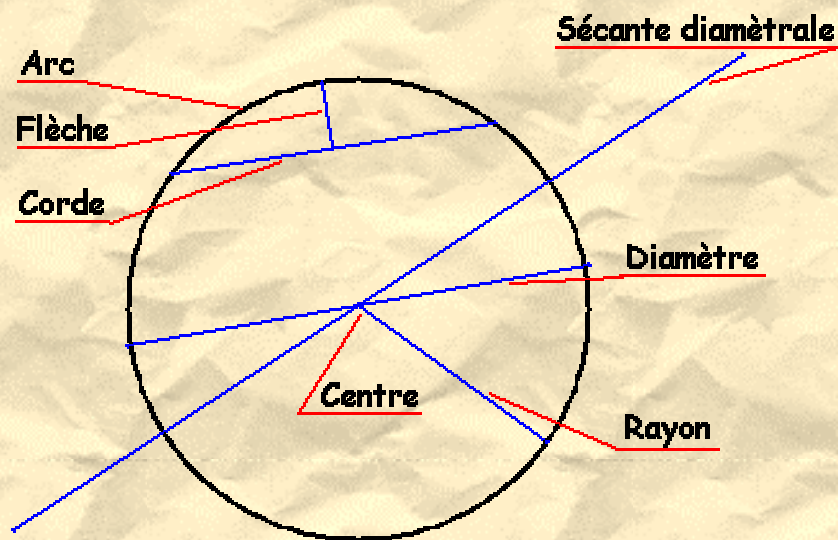
Le disque $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$OM \leq R$$

Remarque :

On peut parler de disque fermé pour l'ensemble des points du plan vérifiant $OM \leq R$ et de disque ouvert pour l'ensemble des points du plan vérifiant $OM < R$ (disque fermé sans le cercle)

Vocabulaire lié au cercle (ou au disque) :



Remarque :

Le rayon est un segment joignant le centre du cercle à un point de ce cercle.

Le diamètre est un segment joignant deux points d'un cercle alignés avec le centre (les deux points du cercle sont dits diamétralement opposés).

Il y a une infinité de rayons et une infinité de diamètres.

Le rayon et le diamètre peuvent également être des nombres (mesures des segments représentant un rayon ou un diamètre). Dans ce cas , nous avons (en appelant R le rayon et D le diamètre) :

$$D = 2 \times R$$

Ne pas confondre : "le cercle de diamètre [AB] " et "un cercle de diamètre AB" . Le cercle de diamètre [AB] est le cercle passant par A et B et de diamètre [AB]. Ce cercle est unique.

Un cercle de diamètre AB est un cercle dont la longueur du diamètre est égale à AB. Ce cercle ne passe pas nécessairement par les points A et B. Il y en a une infinité.

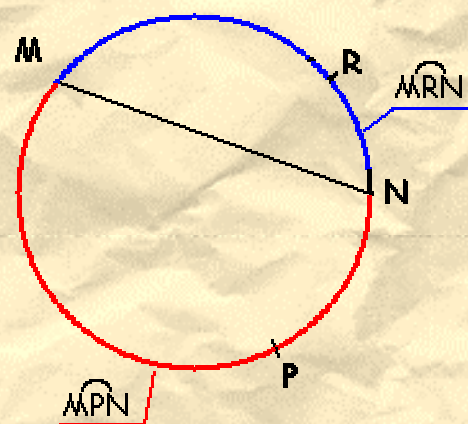
Une corde est un segment joignant deux points quelconques d'un cercle.

Un diamètre est une corde particulière. C'est d'ailleurs la corde la plus longue d'un cercle donné.

Un arc est une des deux parties d'un cercle obtenues par le tracé d'une corde. Il existe, pour une corde donnée, deux arcs.

Généralement, c'est le "petit" arc qui est utilisé. Cet arc se note $\widehat{MN}$.

S'il y a une ambiguïté, nous pouvons utiliser un troisième point et noter $\widehat{MRN}$ l'arc d'extrémités M et N contenant R et $\widehat{MPN}$ l'arc d'extrémités M et N contenant le point P



Deux formules à savoir :

Périmètre d'un cercle (encore appelé circonférence)

$$P = 2 \times \pi \times R$$

Aire d'un disque (ou par abus de langage aire d'un cercle)

$$A = \pi \times R^2$$

Moyen Mnémotechnique :

Pour se rappeler de ces deux formules, il suffit de penser à Pierre. Nous avons dans l'ordre :

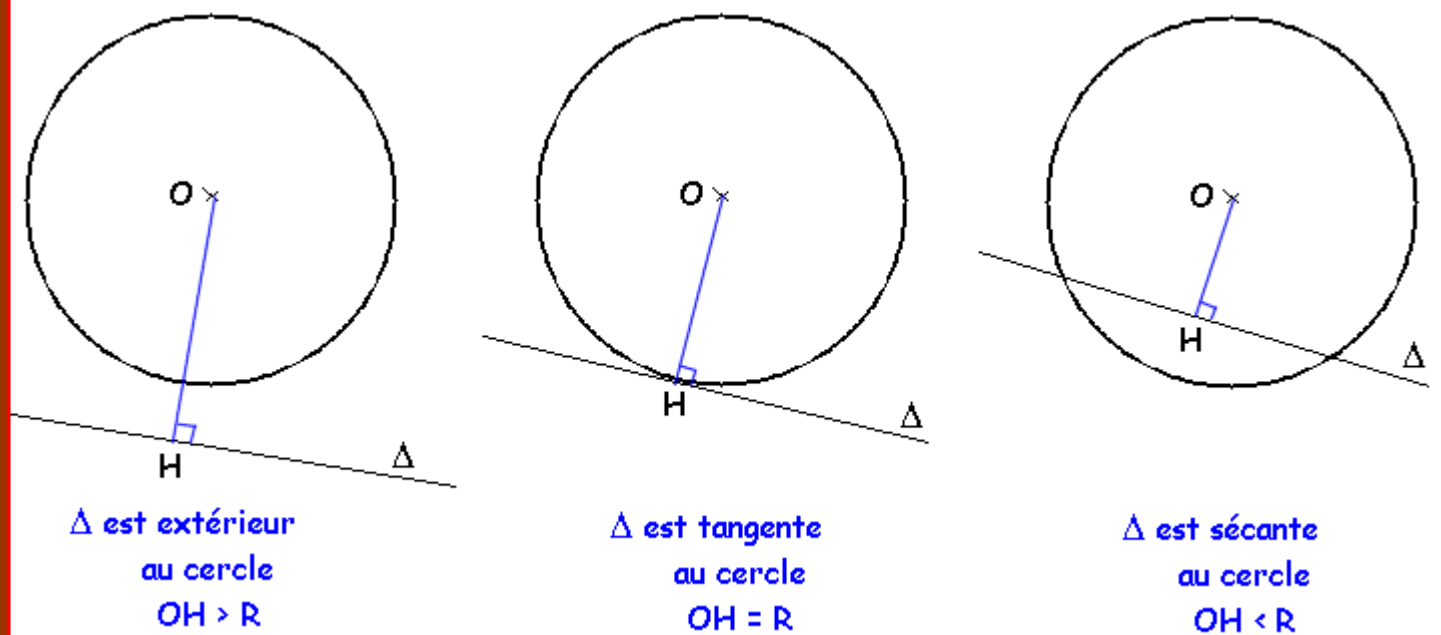
$$P = 2 \text{ Pierre(s)} \text{ soit } 2 \times \pi \times R$$

$$A = \text{Pierre } 2 \text{ soit } \pi \times R^2$$

Remarque :

Le cercle est de toutes les figures planes "construites" avec une ligne fermée, la figure qui, pour un périmètre donné, a la plus grande aire.

Position relatives d'un cercle et d'une droite :



Si la distance du centre du cercle à la droite est supérieure au rayon, la droite est extérieure au cercle. Il n'y a pas de point d'intersection.

Si la distance du centre du cercle à la droite est inférieure au rayon, la droite est sécante au cercle. Il y a deux points d'intersection.

Cas limite :

Si la distance du centre du cercle à la droite est égale au rayon, la droite est tangente au cercle. Il n'y a pas qu'un seul point d'intersection.

Tangente à un cercle :

Une droite est tangente à un cercle si cette droite "coupe" le cercle en un seul point.

Cette définition n'est pas suffisante.

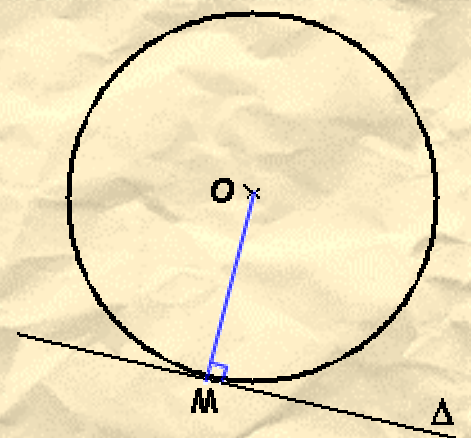
Une droite est tangente à un cercle au point M si la distance du centre de ce cercle à la droite est égale au rayon.

Ce qui signifie, en appelant O le centre du cercle, que (OM) est perpendiculaire à la droite.

Définition :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et soit M un point de ce cercle $\mathcal{C}$.

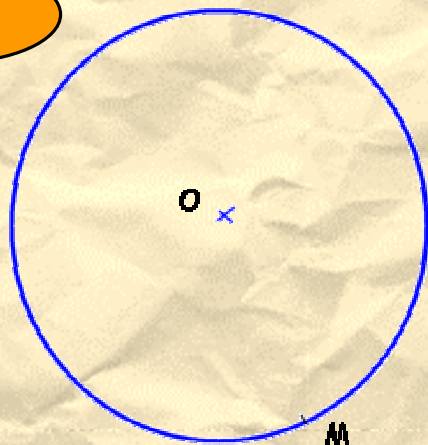
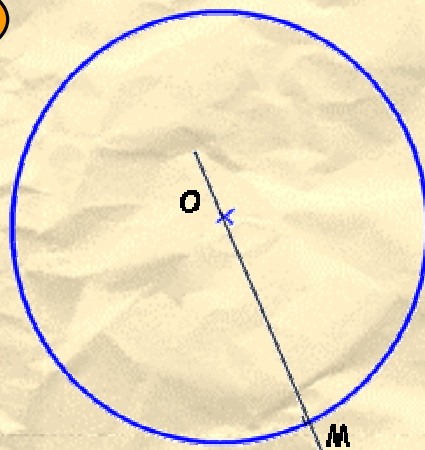
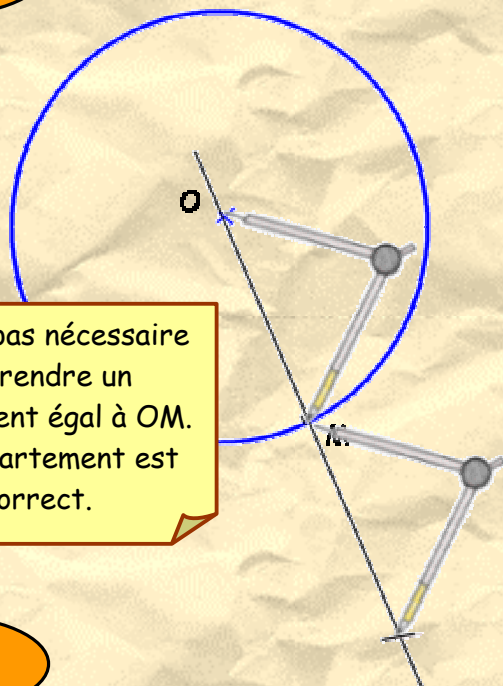
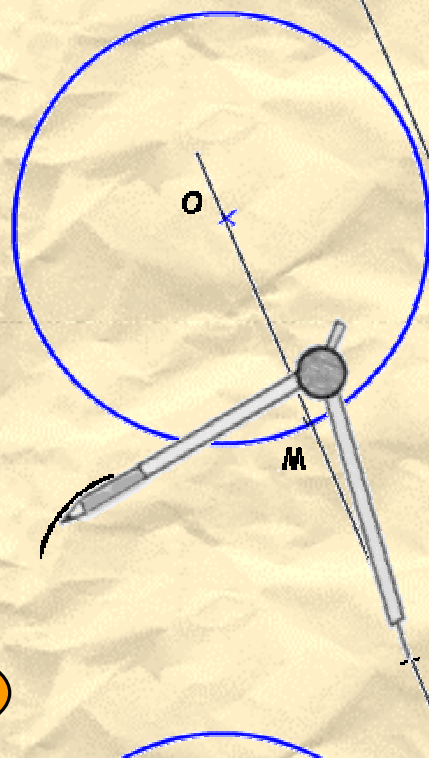
Une droite Δ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point M si les droites (OM) et Δ sont perpendiculaires.



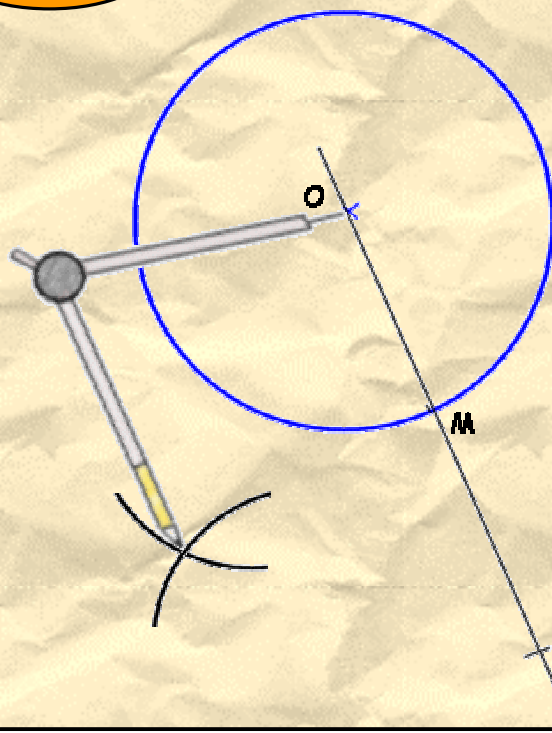
Construction de la tangente à un cercle :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et M un point de ce cercle.

(Il suffit de construire la perpendiculaire à la droite (OM) passant par M)

1**2****3****4**

Il n'est pas nécessaire
de prendre un
écartement égal à OM .
Tout écartement est
correct.

5**6**