THEME 8

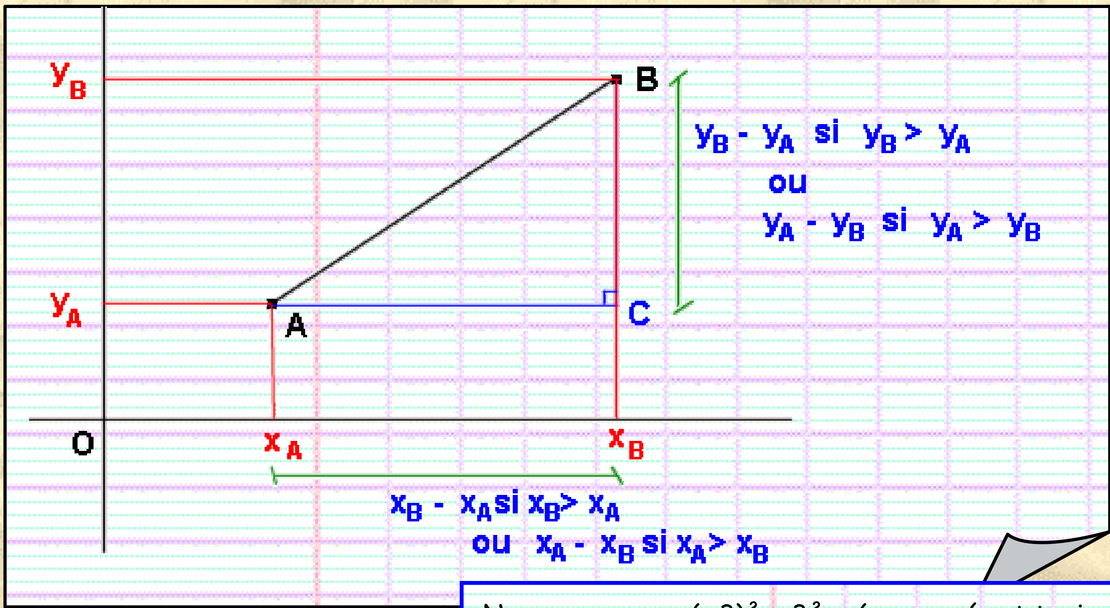
DISTANCE DE DEUX POINTS

DANS UN REPERE ORTHONORMAL

▶ Dans tout ce chapitre, nous travaillerons dans un repère orthonormal (O , I , J)
Un repère (O , I , J) est dit orthonormal (ou orthonormé) lorsque les axes sont perpendiculaires et lorsque OI = OJ (= 1).

Recherche :

Considérons deux points A et B de coordonnées respectives (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B). Nous supposerons de plus que $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$.
Soit C le point d'intersection de la parallèle à l'axe des abscisses passant par A et de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par B.
Comme les axes sont perpendiculaires (repère **ortho**normal) , le triangle ABC est rectangle en C.
Nous pouvons donc, dans ce triangle, appliquer le théorème de Pythagore.



Nous avons :

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

Donc (*voir ci-contre*)

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Et par suite

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Nous savons que $(-3)^2 = 3^2$ (un carré est toujours positif)
Lien entre $x_B - x_A$ et $x_A - x_B$:
Ces deux valeurs ont la même partie numérique, mais diffèrent par leurs signes. Si l'une des valeurs est positive, l'autre est négative. Elles ne sont pas égales, mais vérifient l'égalité suivante :

$$x_B - x_A = -(x_A - x_B)$$

Mais, si maintenant, nous élevons au carré ces deux valeurs, nous obtenons

$$(x_B - x_A)^2 = [-(x_A - x_B)]^2 = (x_A - x_B)^2$$

Il y a donc égalité $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$

Remarque :

Il est vrai que nous pouvions également écrire

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

ou encore $\quad AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $\quad$ ou encore ...

Il n'y a pas d'ordre dans les différences , mais il est préférable (non obligatoire) de commencer par le dernier point de l'écriture AB , c'est à dire par le point B.

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère, soient A et B deux points de coordonnées respectives (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B).

Nous avons :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

ou $\quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

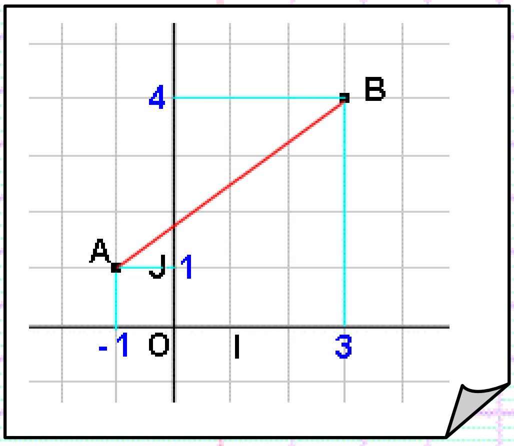
Remarque :

Cette propriété donne en plus de la distance AB des deux points, le carré de cette distance.
Il est peut-être préférable d'utiliser, dans les exercices, cette formule.

SAVOIR CALCULER UNE DISTANCE

Exemple :

Soient, dans un repère orthonormal (O , I , J), les points A , B et C de coordonnées respectives (- 1 , 1) , (3, 4) et (2 ; – 1).
Calculer AB et AC.



Calcul de AB :

Il est inutile de refaire la démonstration.
Il suffit d'appliquer la formule. Afin d'éviter d'écrire plusieurs fois le radical, et pour faciliter certaines écritures, nous allons calculer le carré de cette distance.
Nous avons :

$AB^2 = [\, 3 - (-1)\,]^2 + (\,4 - 1\,)^2$

$AB^2 = (\,3 + 1\,)^2 + (\,4 - 1\,)^2$

$AB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

$AB = \sqrt{25} = 5$

$\boxed{AB = 5}$

Remarque :

Si l'unité commune sur les deux axes était, par exemple, le centimètre, la longueur du segment [AB] serait de **5** cm

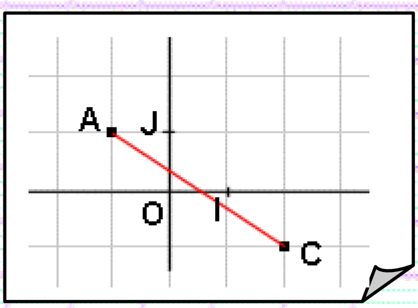
Calcul de AC

Nous avons :

$AC^2 = [\, 2 - (-1)\,]^2 + (\,-1 - 1\,)^2$

$AC^2 = (\,2 + 1\,)^2 + (\,-2\,)^2 = 3^2 + (\,-2\,)^2 = 9 + 4 = 13$

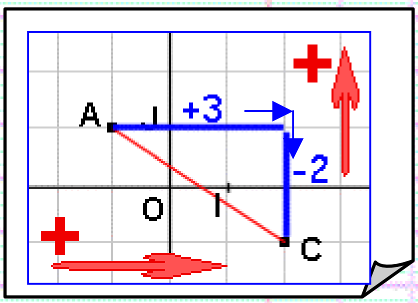
$AC = \sqrt{13}$



$AC = \sqrt{13}$

Astuce :

Il « faut » toujours commencer par les coordonnées du dernier point. Avec ce principe, qui sera exploité un peu plus tard, dans une nouvelle leçon, nous pouvons « vérifier » ,sur le dessin, nos calculs.
Reprenons l'exemple précédent où il est demandé de calculer AC.

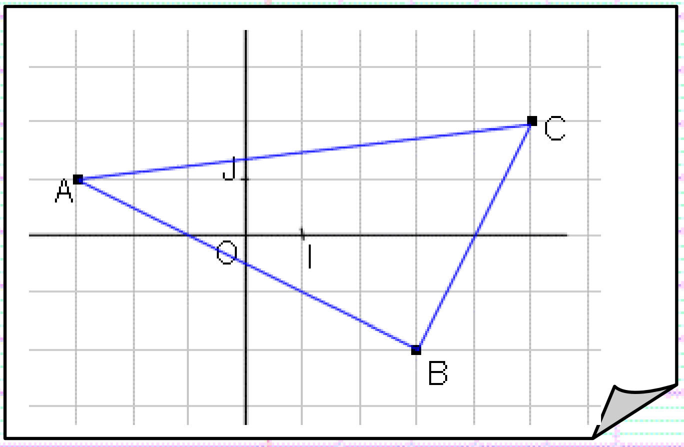


Les sens positifs sont donnés par les deux axes.
Pour «aller » de A à C , il suffit de se « déplacer » selon l'axe des abscisses de + 3, puis , selon l'axe des ordonnées, de – 2.
Nous retrouvons, dans le calcul de la distance ces deux déplacements.
$AC^2 = (2 + 1)^2 + (- 2)^2 = \mathbf{3^2 + (- 2)^2} = 9 + 4 = 13$
Vous pouvez le vérifier sur le calcul de AB (cf. ci-dessus) et sur les calculs suivants.

SAVOIR DEMONTRER QU'UN TRIANGLE EST RECTANGLE

Exemple :

Soient, dans un repère orthonormal (O , I , J), les points A , B et C de coordonnées respectives (- 3 ; 1) , (3 ; - 2) et (5 ; 2) .
Montrer que le triangle ABC est rectangle.



Calcul de AB (ou de AB²) :

$AB^2 = [3 - (- 3)]^2 + (- 2 - 1)^2$
$AB^2 = (3 + 3)^2 + (- 3)^2$
$AB^2 = 6^2 + (- 3)^2$
$\mathbf{AB^2} = 36 + 9 = \mathbf{45}$
$AB = \sqrt{45}$

Pour « aller » de A à B, il faut se déplacer de + 6 selon l'axe des abscisses et de – 3 selon l'axe des ordonnées.

Calcul de BC (ou de BC²) :

$BC^2 = (5 - 3)^2 + [2 - (- 2)]^2$
$BC^2 = (5 - 3)^2 + (2 + 2)^2$
$\mathbf{BC^2} = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = \mathbf{20}$
$BC = \sqrt{20}$

Calcul de AC (ou de AC²) :

$AC^2 = [5 - (- 3)]^2 + (2 - 1)^2$
$AC^2 = (5 + 3)^2 + (2 - 1)^2$
$\mathbf{AC^2} = 8^2 + 1^2 = 64 + 1 = \mathbf{65}$
$AC = \sqrt{65}$

Le triangle ABC est-il rectangle ?

Nous avons :
$AC^2 = 65$
Et $AB^2 + BC^2 = 45 + 20 = 65$
Donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$
D'après la réciproque de Pythagore , le triangle ABC est rectangle en B.

Remarque :

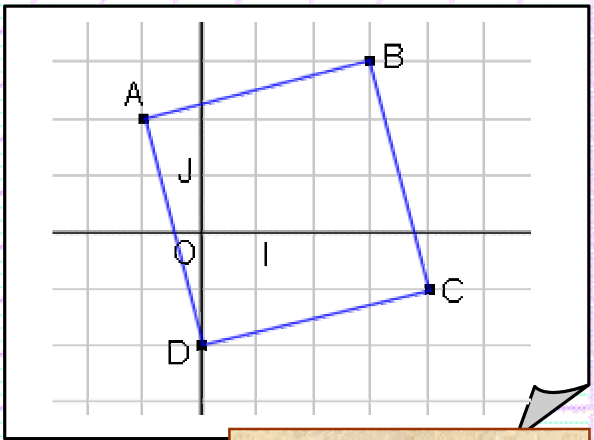
Dans la question, il n'est pas demandé de calculer les distances AB, BC et AC. Seule la nature du triangle est recherchée. C'est pourquoi, il était inutile d'écrire $AB = \sqrt{45}$, $BC = \sqrt{20}$ et $AC = \sqrt{65}$.

La recherche de AB^2 , BC^2 et AC^2 suffisait.
Par contre, s'il avait été demandé de déterminer AB , AC et BC , cette recherche aurait été poussée jusqu'à la simplification des écritures.
$AB = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{65}$

SAVOIR DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN RECTANGLE, UN LOSANGE OU UN CARRE

Exemple :

Soient, dans un repère orthonormal (O , I , J), les points A , B , C et D de coordonnées respectives (- 1 ; 2) , (3 ; 3) , (4 ; - 1) et (0 ; - 2).
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?



Toujours vérifier sur le dessin les coordonnées déterminées par le calcul.

Conjecture : Il semble que ABCD soit un carré !

Montrons que ABCD est un parallélogramme :
Si les diagonales de ABCD ont même milieu, ABCD est un parallélogramme.
Coordonnées du milieu de [AC] :
$$\left(\frac{-1+4}{2} ; \frac{2+(-1)}{2}\right) \text{ soit } \left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$
Coordonnées du milieu de [BD] :
$$\left(\frac{3+0}{2} ; \frac{3+(-2)}{2}\right) \text{ soit } \left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$
Nous constatons que les diagonales du quadrilatère ABCD ont même milieu, donc ABCD est un parallélogramme.

Montrons que ABCD est un rectangle :
Si le parallélogramme ABCD a un angle droit, ABCD est un rectangle.
Pour démontrer que l'angle $\hat{A}$ est droit, il suffit de démontrer que le triangle ABD est rectangle en A.
Calcul de AB :
$AB^2 = [\,3 - (-1)\,]^2 + (3 - 2)^2 = (3 + 1)^2 + (3 - 2)^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$
Donc $AB = \sqrt{17}$
Calcul de AD :
$AD^2 = [\,0 - (-1)\,]^2 + (-2 - 2)^2 = (0 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 1^2 + (-4)^2 = 1 + 16 = 17$
Donc $AD = \sqrt{17}$
Calcul de BD :
$BD^2 = (0 - 3)^2 + (-2 - 3)^2 = (-3)^2 + (-5)^2 = 9 + 25 = 34$
Donc $BD = \sqrt{34}$

Nous avons :
$BD^2 = 34$ et $AB^2 + AD^2 = 17 + 17 = 34$
Donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A
Le parallélogramme ABCD a un angle droit en A, donc ABCD est un rectangle .

Remarque :
Il était également possible de montrer, en les calculant, que les diagonales [AC] et [BD] de ce parallélogramme étaient de même longueur. Ce procédé était certainement plus simple. Mais la méthode proposée va permettre de terminer le problème plus rapidement)

Montrons que ABCD est un losange :
Si le parallélogramme ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur, ABCD est un losange.

D'après les calculs précédents, nous avons :

$$AB = AD = \sqrt{17}$$

Le parallélogramme ABCD a deux côtés consécutifs [AB] et [AD] de même longueur, donc

ABCD est un losange.

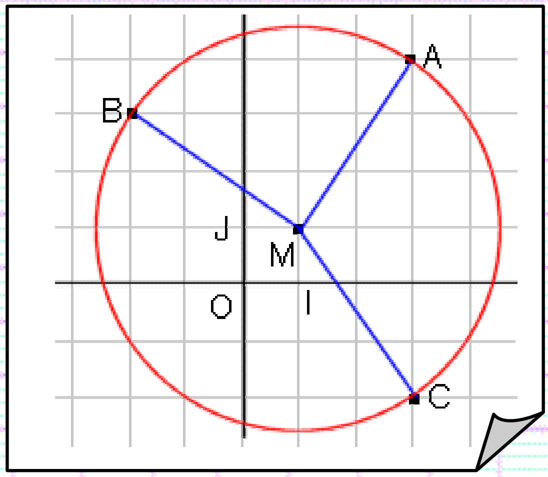
ABCD est à la fois un rectangle et un losange,
donc

ABCD est un carré

SAVOIR DEMONTRER QUE DES POINTS SONT COCYCLIQUES*

Exemple :

Soient, dans un repère orthonormal (O , I , J), les points A , B , C et M de coordonnées respectives (3 ; 4) , (- 2 ; 3) , (3 ; - 2) et (1 ; 1).
Montrer que A , B et C sont sur un même cercle de centre M.



Remarque : Cocycliques

Des points du plan sont dits *cocycliques* s'ils appartiennent à un même cercle.
Deux points sont toujours cocycliques.
Trois points non alignés sont cocycliques (le centre du cercle étant le centre du cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points)

Calcul de MA :

$MA^2 = (3-1)^2 + (4-1)^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

donc :

$$MA = \sqrt{13}$$

Calcul de MB :

$MB^2 = (-2-1)^2 + (3-1)^2 = (-3)^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

donc :

$$MB = \sqrt{13}$$

Calcul de MC :

$MC^2 = (3-1)^2 + (-2-1)^2 = 2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$

donc :

$$MC = \sqrt{13}$$

…… (on continue s'il y a d'autres points)

Nous avons $MA = MB = MC = \sqrt{13}$

Les points A , B et C sont donc sur le cercle de centre M et de rayon $\sqrt{13}$.