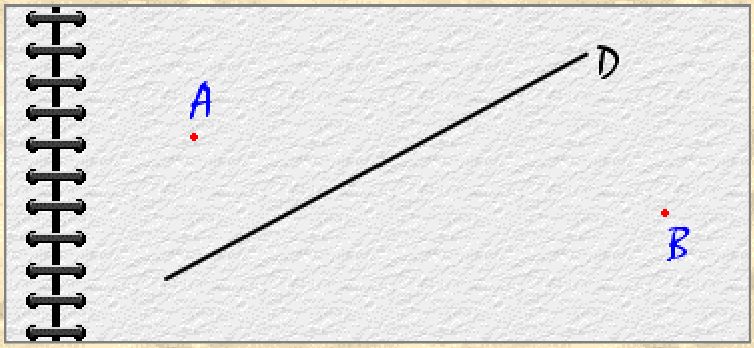
THEME 8

DISTANCE MINIMALE

Problème du plus court chemin :

▶ Problème 1 :

Déterminer, sur la droite D un point P afin que AP + PB soit minimum :



Traçons la droite (AB). Elle coupe la droite D en un point que nous appellerons P.
Soit R un autre point de la droite D, distinct du point P.
Nous avons (inégalité triangulaire) :

$AB < AR + RB$

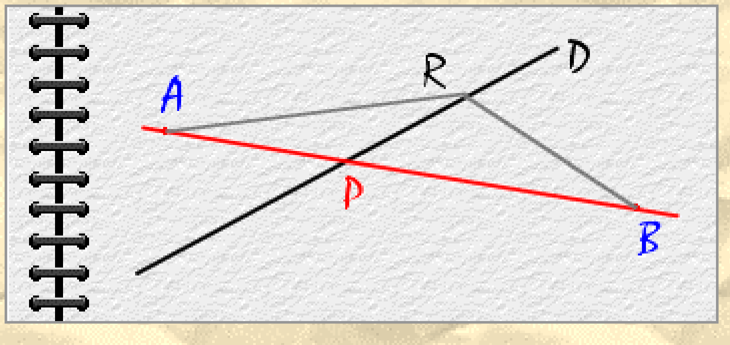
Le cas d'égalité n'est vérifié que pour le point P, point situé sur le segment [AB].

$AB = AP + PB$

Donc, quel que soit le point R sur D distinct de P

$AP + PB < AR + RB$

La distance AP + PB est donc minimale.

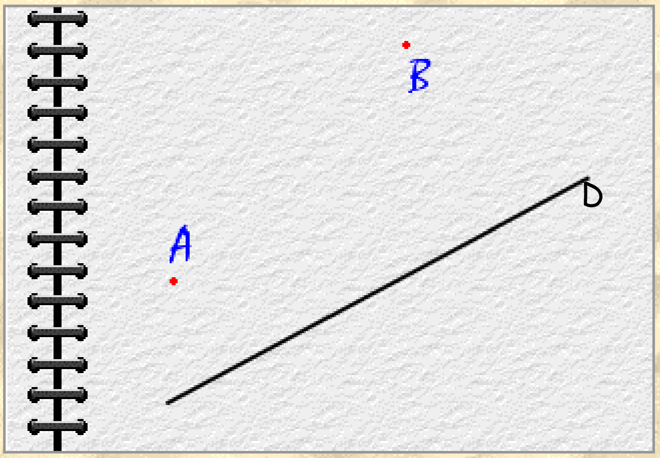


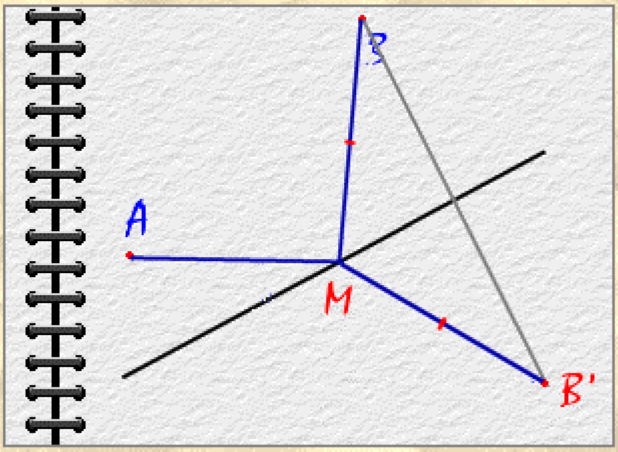
▶ Problème 2 :

Déterminer, sur la droite D un point P afin que AP + PB soit minimum :

Soit B' le symétrique du point B par rapport à la droite D.

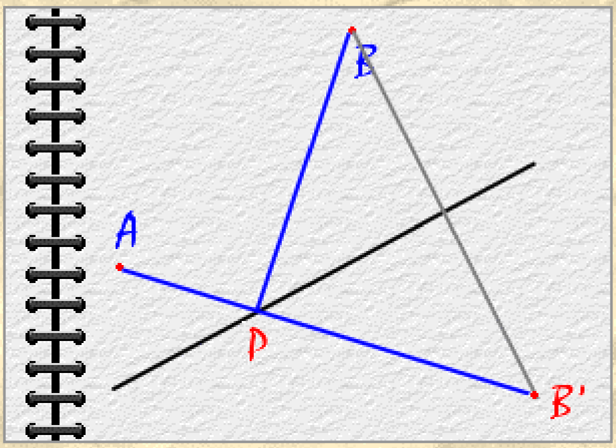
Par définition de la symétrie axiale, la droite D est la médiatrice du segment [BB'].



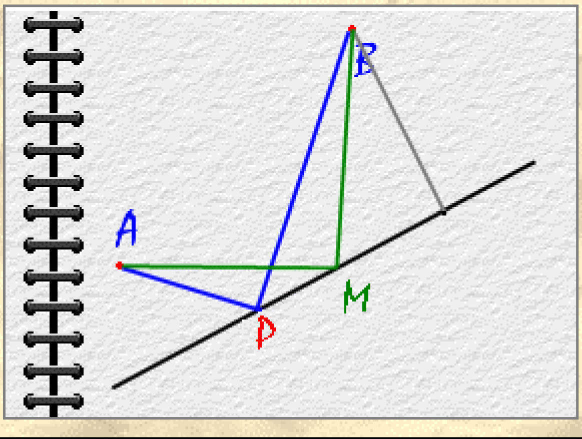


Soit M un point de la droite D.
Comme M est sur la médiatrice du segment [BB'], le point M est équidistant des deux points B et B' *(Tous les points de la médiatrice d'un segment sont équidistants des deux extrémités de ce segment)*
Donc

MB = MB'



Nous cherchons donc, sur la droite D, un point M afin que AM + MB , c'est à dire AM + MB' soit minimum.
D'après le <u>problème 1</u>, ce point est le point P intersection de D et de la droite (AB').



En reprenant les notations précédentes, la distance AP + PB est inférieure à la distance AM + MB.

Liens avec la physique :

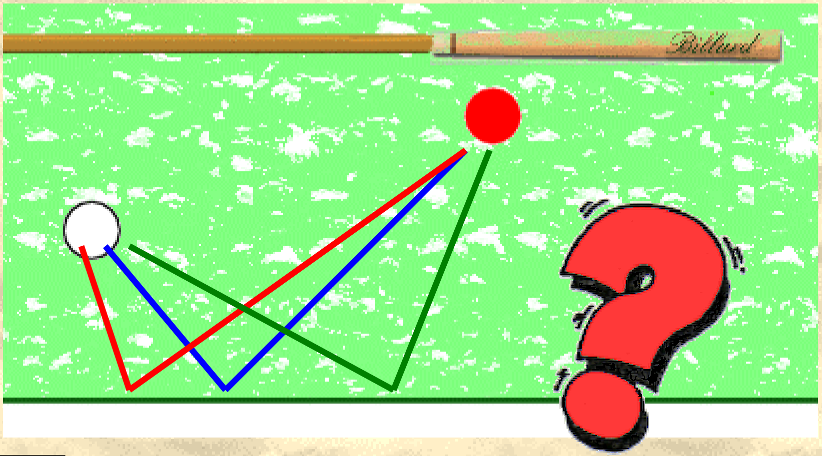
Dans la nature, une rivière qui coule prend le chemin le plus facile, le chemin qui lui demande le moins d'énergie possible.
Un rayon lumineux suit le principe établi par Fermat (1657) :
La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit minimale.
En **simplifiant la théorie**, une balle qui se déplace entre deux points prendra le chemin qui lui demande le moins d'énergie, c'est à dire le chemin le « plus court », c'est à dire la ligne droite.

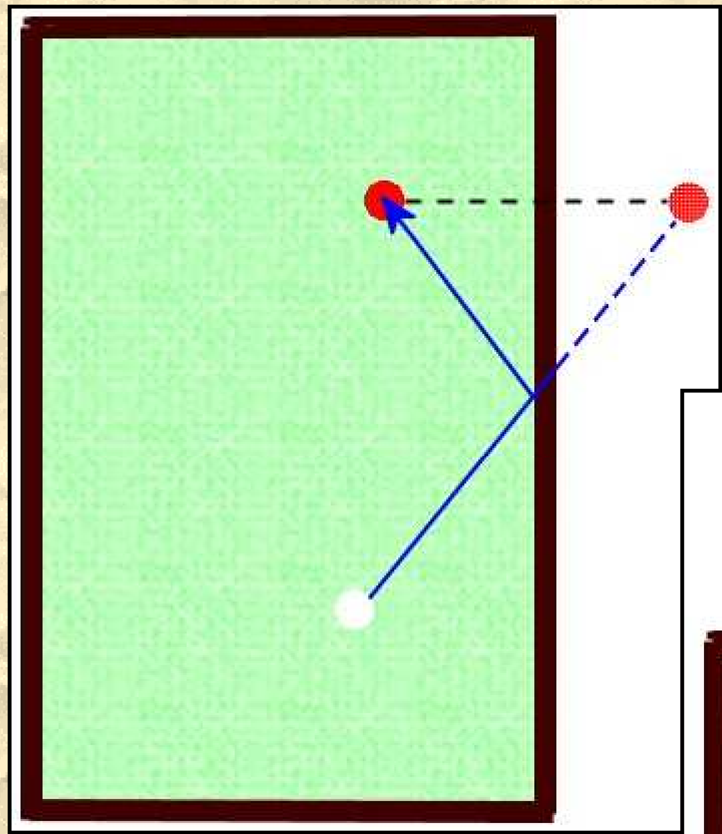
<u>Cas du billard :</u>

Au billard, certaines règles précisent qu'une boule, avant d'aller en frapper une seconde, doit taper une ou plusieurs fois les rebords de la table appelés bandes.

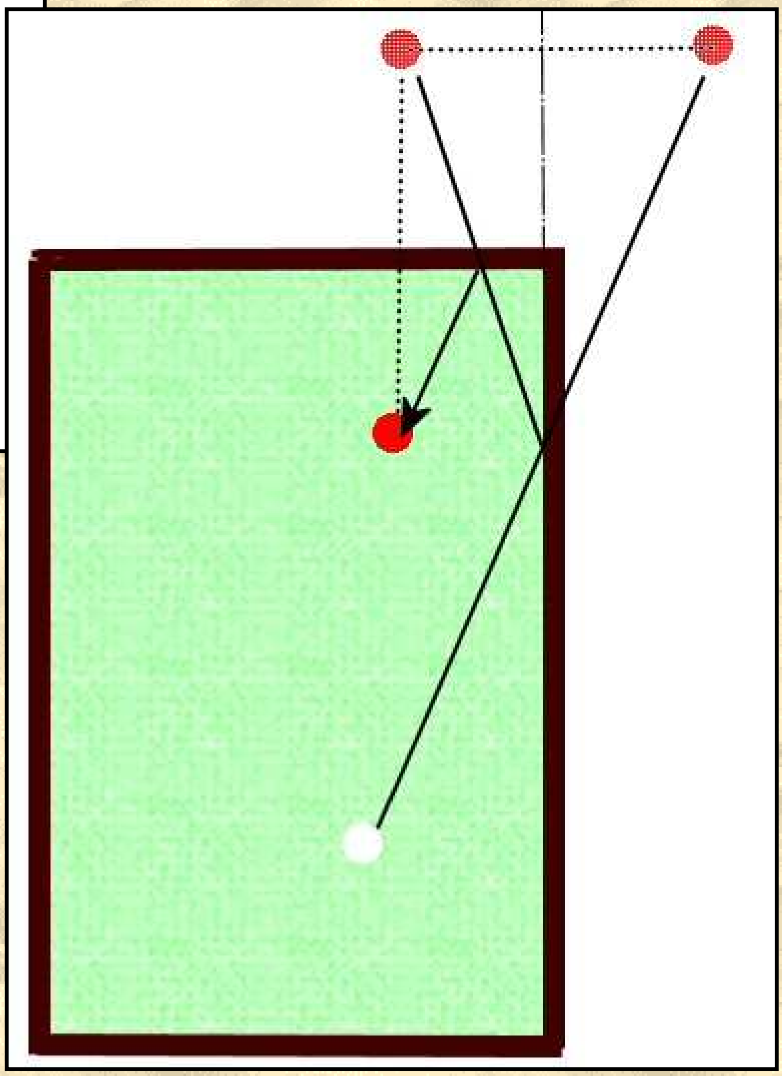
Jeu à une bande :

Où la boule blanche doit-elle frapper la bande (le rebord de la table) afin d'aller frapper la boule rouge ?





La bille blanche, pour aller à l'emplacement de la bille rouge parcourra le chemin le plus court. D'après l'étude précédente, si désirons toucher la bille rouge avec la bille blanche en utilisant une seule bande, il nous faudra viser le symétrique de la bille rouge par rapport à la bande choisie.

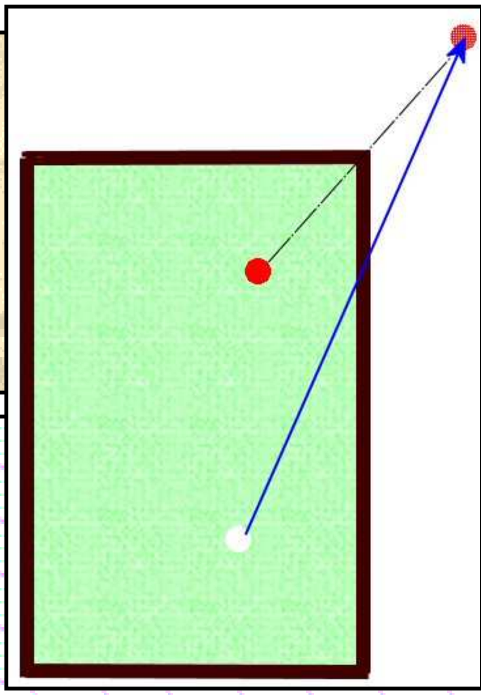


Jeu à deux bandes : (2 bandes perpendiculaires)

Il suffira de viser le symétrique du symétrique de la balle rouge par rapport aux deux bandes choisies.

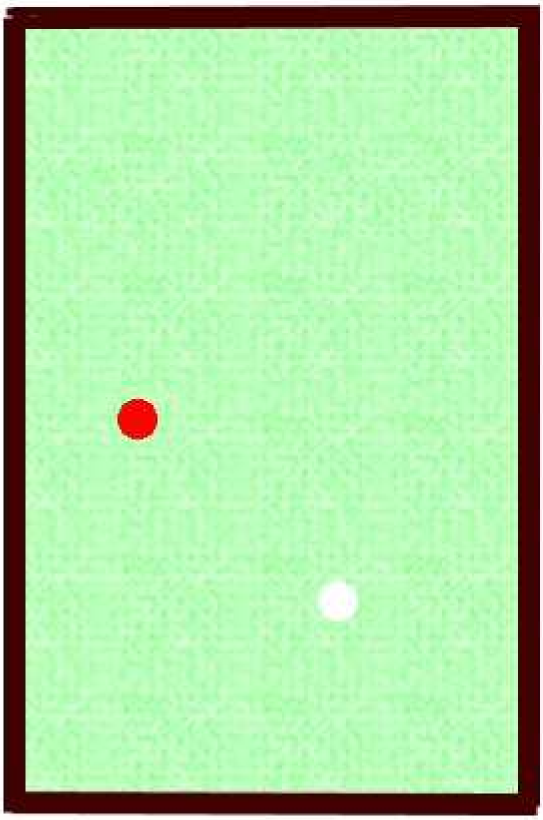
Remarque :

Faire une symétrie par rapport à une droite suivie d'une symétrie par rapport à une droite perpendiculaire revient à faire une symétrie centrale de centre le point d'intersection des deux axes de symétrie.
Il suffit donc, dans le cas d'un jeu à deux bandes, de viser la bille représentée sur le dessin ci-contre



Exercice 1:

Jeu à trois bandes :



Déterminer le trajet de la bille blanche pour qu'elle frappe la bille rouge en trois bandes (bandes consécutives)

Remarque :

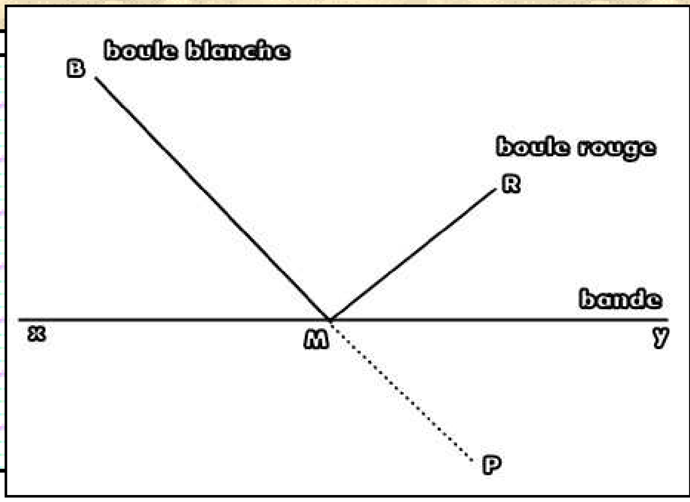
Tout ceci n'est correct que si la bille est frappée sans effet (aucun glissement sur le tapis, aucune rotation , …).

Exercice 2:

Reprenons le jeu à une bande.
B est l'emplacement de la boule blanche, R l'emplacement de la boule rouge, P le symétrique de R par rapport à la bande (xy) et M est le point de contact de la boule qui minimalise la trajet.

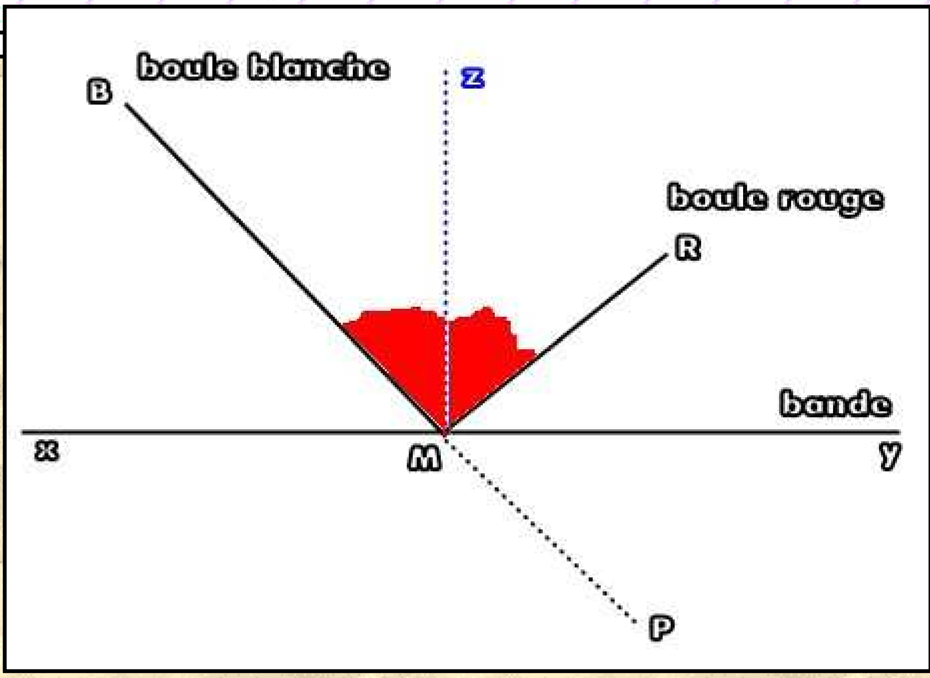
a) Montrer que $R\hat{M}y = y\hat{M}P$

b) Montrer que $B\hat{M}x = y\hat{M}P$



c) En déduire que $B\hat{M}x = R\hat{M}y$

Soit [Mz) la demi-droite perpendiculaire à la droite (xy). Comme les angles $B\hat{M}x$ et $R\hat{M}y$ sont de même mesure, alors les angles $B\hat{M}z$ et $z\hat{M}R$ ont également même mesure (ces angles sont les complémentaires des deux angles $B\hat{M}x$ et $R\hat{M}y$)



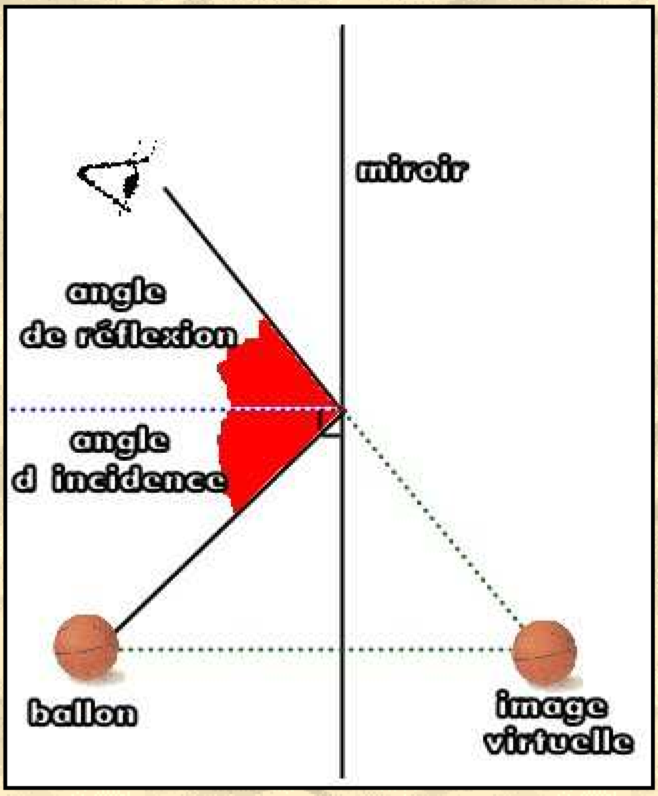
$$B\hat{M}z = z\hat{M}R$$

L'angle $B\hat{M}z$ s'appelle <u>l'angle d'incidence</u> et l'angle $z\hat{M}R$ s'appelle <u>l'angle de réflexion.</u>

Lorsqu'une boule rencontre (sans effet) une bande, l'angle d'incidence est égale à l'angle d'incidence.

Remarque :

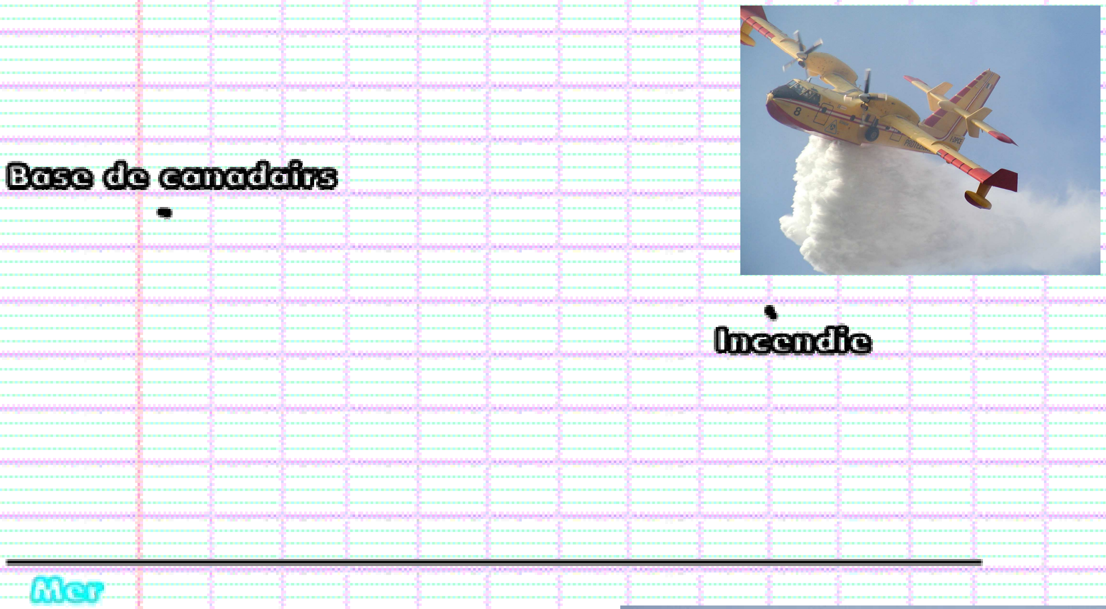
Ce phénomène se retrouve dans les rayons lumineux. Lorsqu'un rayon lumineux rencontre, par exemple, un miroir, le rayon est réfléchi par le miroir avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.



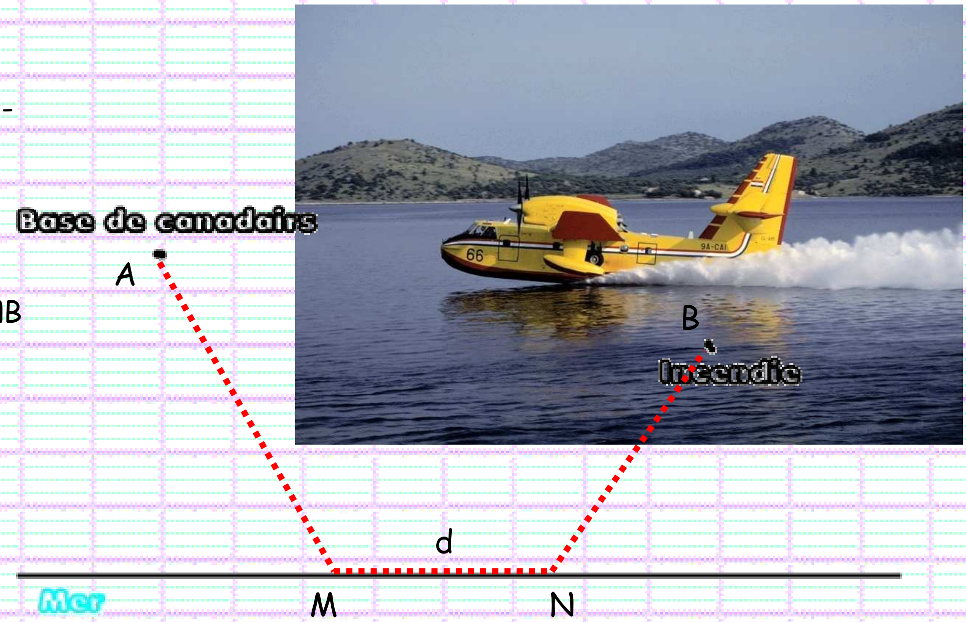
Exercice 3:

Une base de Canadairs A est chargée d'éteindre un incendie de forêt en B. Ils se ravitaillent en eau le long de la côte D.

Quel est le meilleur point S de ravitaillement pour un avion qui part de A pour aller en B ?

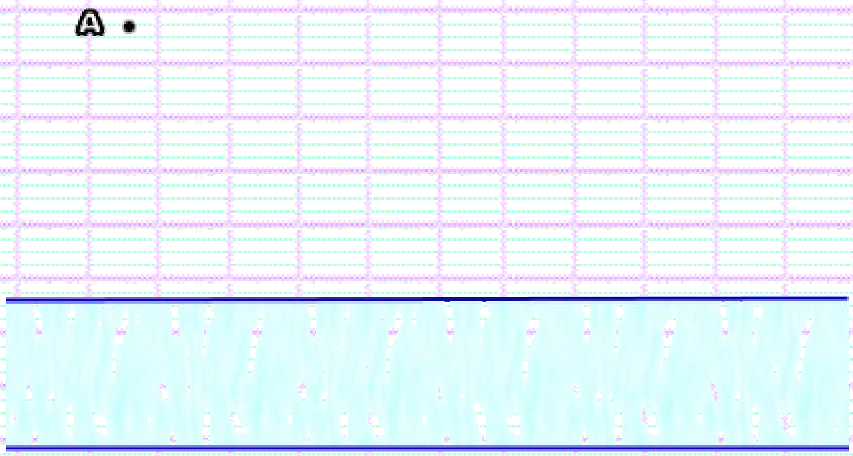


Même exercice mais, cette fois-ci, le canadair, doit suivre le rivage pendant une distance d donnée pour remplir ses réservoirs.
Déterminer la trajectoire AMNB afin que la longueur AM + MN + NB soit minimale.



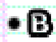
Exercice 4:

Une rivière aux bords parallèles sépare les villes A et B. Où doit-on construire un pont pour rendre minimale le trajet de A à B ?(Pour des raisons de coût de construction, le pont doit être perpendiculaire aux rives).



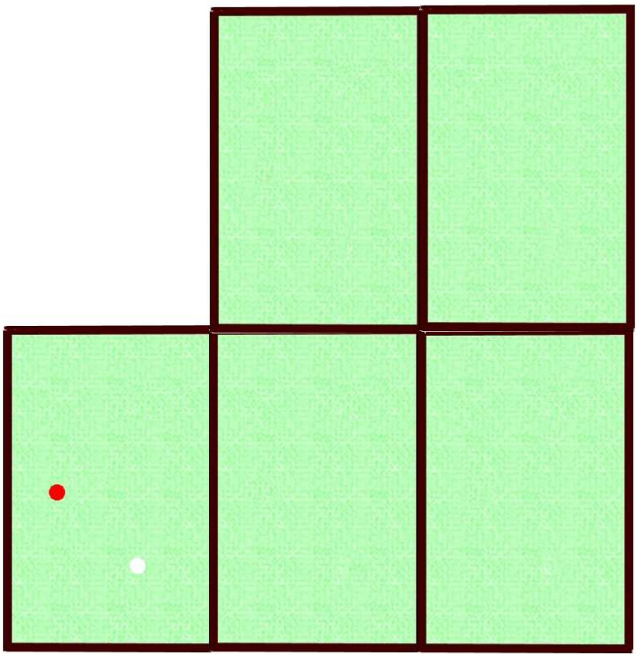
Exercice 5:

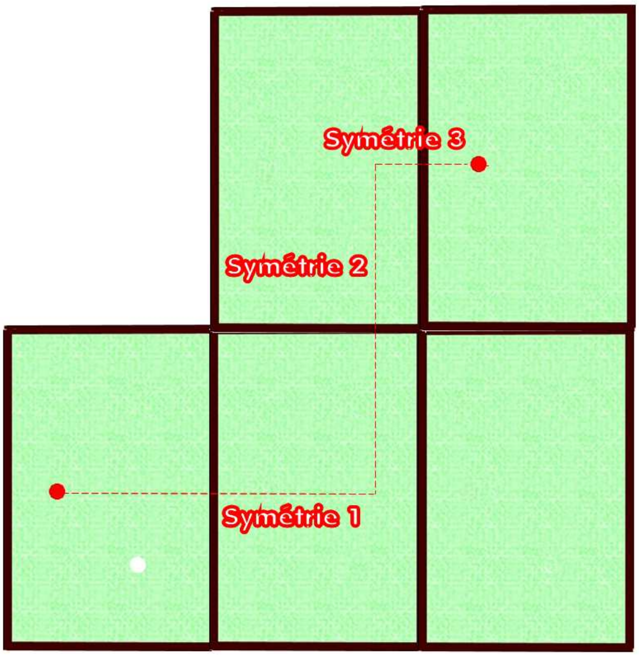
Deux cercles sont sécants en A et B.
Trouver une droite D passant par A telle que les cercles découpent sur D des cordes de même longueur.
(A part la solution (AB))

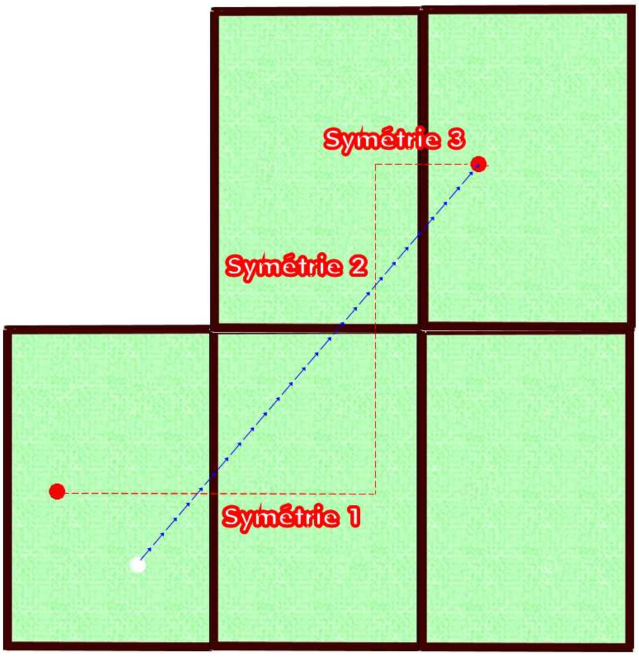


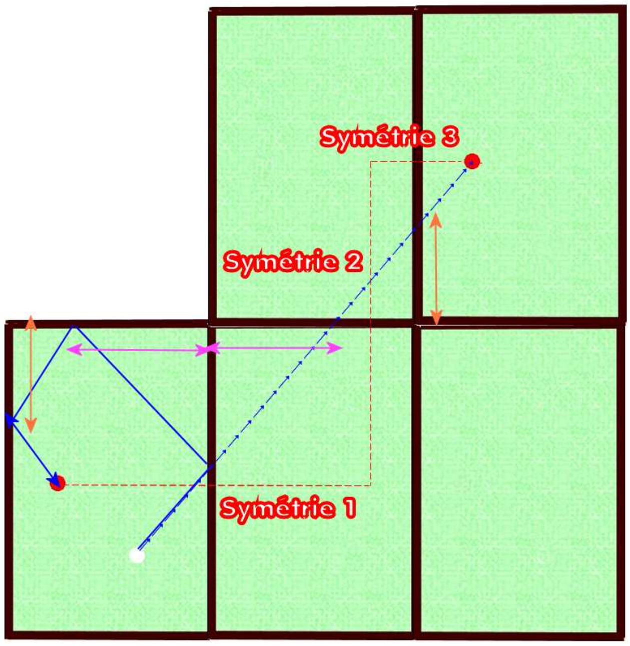
Correction de l'exercice 1 :

Au lieu de chercher les différentes images par symétrie par rapport aux côtés de la table , nous pouvons disposer des tables (virtuelles) comme sur le dessin ci-dessous :









Aide pour l'exercice 5 :

Considérez le symétrique du premier cercle par rapport à A (ou du second cercle par rapport à A) ;
Que peut-on dire du point d'intersection du premier cercle avec l'image du second cercle (ou du second cercle avec l'image du premier cercle) ?