THEME 8

DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE
EXERCICES (DEMONSTRATIONS)

Exercice 1 : Médiatrices

Deux points A et B appartiennent à un cercle de centre O. Démontrer que la médiatrice de la corde [AB] passe par O.

Exercice 2 : Médiatrices

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. Soient trois points A, B et C appartenant au cercle $\mathscr{C}$. La droite perpendiculaire à (BC) passant par O coupe (BC) en I.

a)Démontrer que (OI) est la médiatrice de [BC].

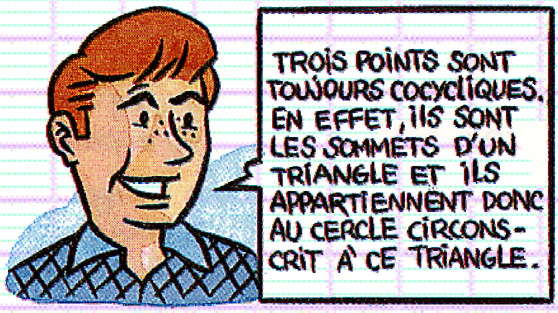
b)Démontrer que [AI] est la médiane issue de A du triangle ABC .

Exercice 3 : Médiatrices

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point extérieur à ce cercle $\mathscr{C}$. Le cercle $\mathscr{C}'$ de centre A passant par O coupe $\mathscr{C}$ en E et F. Démontrer que (OA) est la médiatrice de [EF].

Exercice 4 : Points cocycliques

Définition : Des points cocycliques sont des points situés sur le même cercle.



L'affirmation ci-contre est-elle vraie ?

Exercice 5 : Recherche de l'orthocentre.

Soient ABC un triangle et H l'orthocentre de ce triangle. Quel est le point de rencontre des hauteurs du triangle BHC ? du triangle AHB? et du triangle AHC ?

Exercice 6 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Soit E le symétrique du point C par rapport à B . Soit G le point d'intersection des droites (AB) et (OE) .

Que représente le point G pour le triangle AEC ?

En déduire que la droite (CG) coupe le segment [AE] en son milieu .

Exercice 7 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

Soit I le milieu de [AD] et soit J le milieu de [DC].

a)Que représente la droite (AJ) pour le triangle ADC ?

b)Montrer que les droites (AJ), (CI) et (DB) sont concourantes.

Exercice 8 : Comment démontrer que les médiatrices sont concourantes ?

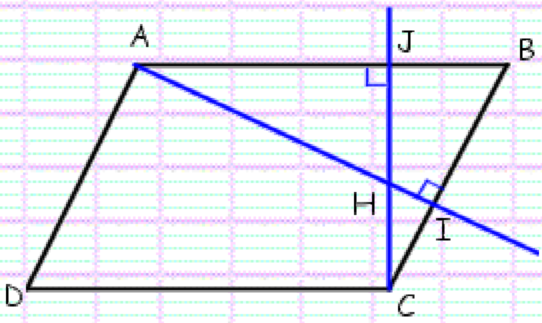
Cet exercice est une démonstration de la propriété des médiatrices d'un triangle. Vous n'utiliserez donc pas le fait que , dans un triangle, les médiatrices sont concourantes.

Soit un triangle ABC et I , J et K les milieux respectifs de [AB], [BC] et [CA]. Les perpendiculaires en I à la droite (AB) et en K à la droite (AC) se coupent en O.

a) Montrer que OB = OC .

b)En déduire que la droite (OJ) est la médiatrice de (BC) .

Exercice 9 :



ABCD est un parallélogramme. (cf. figure ci-contre)

Les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires. Les droites (CJ) et (AB) sont perpendiculaires.

Soit H le point d'intersection de (AI) et de (JC).

Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC) ?

Exercice 10 :

Soient A, I et O 3 points non alignés.

On appelle B le symétrique de A par rapport à O, et C le symétrique de B par rapport à I.

a)Faire une figure soignée.

b)Que représente la droite (AI) pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.

c)Que représente la droite (CO) pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.

d)On appelle G le point d'intersection des droites (AI) et (OC).

Démontrer que la droite (BG) coupe le segment [AC] en son milieu.

Exercice 11 :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

Soient I est le milieu de [AD] et J celui de [AB].

Soit D_1 la droite passant par I et perpendiculaire à [AD].

Soit D_2 la droite passant par J et perpendiculaire à [AB].

Les deux droites D_1 et D_2 se coupent en K.

Que peut-on dire des droites (OK) et (BD) ? (**Aide** : Utiliser le triangle ABD)

Exercice 12 :

Soient A et B deux points . Soit D une droite perpendiculaire à la droite (AB). Considérons sur cette droite un point O.

La perpendiculaire à la droite (OB) passant par A coupe (OB) en A'. Soit H le point d'intersection de la droite (AA') avec la droite D.

Démontrer que les droites (OA) et (BH) sont perpendiculaires.

Exercice 13 :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

Une droite perpendiculaire à l'hypoténuse de ce triangle coupe la droite (BC) en D , la droite (AB) en E et la droite (AC) en F .

Démontrer que les droites (CE) et (BF) sont perpendiculaires.

Exercice 14 :

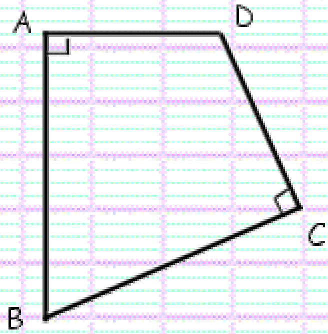
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Soient A' ,B' et C' les milieux des côtés respectifs [BC] , [AC] et [AB].

a)Montrer que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles. En déduire que les droites (OA') et (B'C') sont perpendiculaires.

b)Que représente la droite (OA') pour le triangle A'B'C' ?

c)Démontrer que le point O est l'orthocentre du triangle A'B'C' .

Exercice 15 : (dessin ci-contre)



Les droites (AB) et (DC) se coupent en M. Les droites (AD) et (BC) se coupent en N.
Démontrer que les droites (BD) et (MN) sont perpendiculaires.

Exercice 16 :

Soit un parallélogramme ABCD. On appelle E le symétrique de D par rapport à C.
Les droites (AD) et (BE) se coupent en F.

a)Montrer que le point B est le milieu du segment [EF].

b)Les droites (DB) et (FC) se coupent en G. Montrer que les points E, G et A sont alignés.

Exercice 17 :

Soit ABC un triangle et soit I le milieu de [BC].
La parallèle à la droite (AC) passant par I coupe [AB] en J et la parallèle à la droite (AB) passant par I coupe [AC] EN K.
Démontrer que les droites (AI) , (BK) et (CJ) sont concourantes (**Aide** : Que représente J pour [AB] ?)

Exercice18 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Soit I le symétrique du point A par rapport à C.
Les droites (DC) et (BI) se coupent en M.

a)Montrer que M est milieu de [BI].

b)Les droites (BC) et (DI) se coupent en N . Montrer que N est milieu de [DI].

Exercice 19 : Comment démontrer que les médianes sont concourantes ?

Soit ABC un triangle. Soient J et K les milieux respectifs de [AC] et [AB]. Les droites (CK) et (BJ) se coupent en G.
Soit A' le symétrique de A par rapport au point G.

a)Démontrer que les droites (BJ) et (A'C) sont parallèles (considérer pour cela le triangle AA'C).
Démontrer, de même, que les droites (CK) et (A'B) sont parallèles.

b)Démontrer que le quadrilatère BGCA' est un parallélogramme .

c)Démontrer que (AG) est une médiane du triangle ABC .

d)Conclure .

Exercice 20 : Comment démontrer que les hauteurs sont concourantes ?

Soit ABC un triangle. Soit D_1 la droite passant par A et parallèle à (BC). Soit D_2 la droite passant par B et parallèle à (AC). Elle coupe la droite D_1 en C'. Soit D_3 la droite passant par C et parallèle à (AB) . Elle coupe D_1 en B' et D_2 en A'.

Soit (AH) la hauteur issue de A au triangle ABC (Le point H est un point de [BC])

a)Démontrer que AB'CB et AC'BC sont des parallélogrammes.

b)En déduire que A est le milieu de [B'C'] .

c)Démontrer que (AH) est perpendiculaire à (B'C') .

d)En déduire que (AH) est la médiatrice de (B'C') .

En appelant (BH') et (CH") les deux autres hauteurs du triangle ABC et en procédant comme ci-dessus, on démontre que (BH') et (CH") sont respectivement les médiatrices de [A'C'] et de [A'B'] .

e)Que peut-on dire des droites (AH) , (BH') et (CH") pour le triangle A'B'C' ?

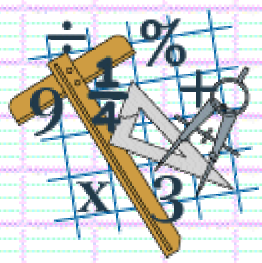
f)En utilisant une propriété des médiatrices d'un triangle, en déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes .

Exercice 21 :

Soit ABCD un parallélogramme.
Soit O le point d'intersection des diagonales de ABCD et soit M un point extérieur à ce parallélogramme.

a)Démontrer que la droite (MO) est médiane du triangle MAC.

b)Montrer que les triangles MAC et MBD ont même centre de gravité.



Exercice 22 :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

La bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$ coupe l'hypoténuse en E. La perpendiculaire à la droite (AC) passant par E coupe [AC] en I et la perpendiculaire à la droite (AB) passant par E coupe [AB] en J.

Montrer que le quadrilatère AIEJ est un carré.

Exercice 23 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Soit P le milieu de [OB]

Les droites (CP) et (AD) se coupent en R.

Soit T le symétrique de R par rapport au point P.

La droite (RM) coupe (DT) en M.

a)Faire un dessin.

b)Que représente la droite (DP) pour le triangle DRT ?

c)Montrer que $DO = \frac{2}{3}DP$. En déduire que O est le centre de gravité du triangle DRT.

d)Démontrer que M est milieu de [DT].

Exercice 24 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

La perpendiculaire à la droite (BD) passant par A et la perpendiculaire à (AC) passant par B sont sécantes en E.

Montrer que (LO) est perpendiculaire à (AB) .

Exercice 25 :

Soit ABC un triangle . Les bissectrices de ce triangle sont concourantes en I.

Sachant que $\widehat{BAI} = 20^\circ$ et $\widehat{AIB} = 120^\circ$, calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

Exercice 26 : Démonstration de la propriété de la médiane .

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit O le milieu de l'hypoténuse.

Soit A' le symétrique de A par rapport à O.

a)Quelle est la nature du quadrilatère ABA'C ?

b)Montrer que OA a pour valeur la moitié de BC.

Exercice 27 :

Soit C un cercle de centre O et de diamètre [AB] . Soit C '' le cercle de diamètre [OA] .

Soit P un point du cercle C. La droite (AP) coupe C '' en I.

a)Démontrer que les droites (OI) et (BP) sont parallèles.

b)En déduire que le point I est le milieu de [AP].

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle. Soient H et K les pieds des hauteurs issues de A et de B.

Démontrer que les points A, B, H et K sont sur un même cercle, et préciser son centre.

Exercice 29 :

C et C ' sont deux cercles de centre O et O' sécants en deux points A et B.

Le segment [CA] est un diamètre du cercle C et le segment [DA] est un diamètre du cercle C '.

a)Démontrer que les droites (CD) et (OO') sont parallèles.

b)Démontrer que les points B , C et D sont alignés .

c)La droite (AD) recoupe le cercle C en E. La droite (AC) recoupe le cercle C ' en F

Démontrer que les points E , F , C et D sont cocycliques (c'est à dire sur un même cercle) . Quel est son centre ?

d)Les droites (DF) et (CE) sont sécantes en H . Démontrer que les trois points A, B et H sont alignés .

Exercice 30 :

Soit C un cercle de centre O.

Soient A et B deux points de ce cercle tels que (OA) et (OB) soient perpendiculaires.
On appelle M le second point d'intersection des cercles de diamètres [OA] et [OB].

Montrer que les points A, M et B sont alignés.

Exercice 31 :

Soit C un cercle de centre O et de diamètre [AB] . Soit M un point du cercle C distinct de A et de B.
Soit R un point de [AB] distinct de A et de B.
Soit d la perpendiculaire en R au segment [AB]. La droite d coupe la droite (MA) en P et la droite (MB) en Q.

a)Démontrer que les droites (AM) et (MB) sont perpendiculaires.

b)Démontrer que le point P est l'orthocentre du triangle ABQ .

c)Démontrer que les droites (PB) et (AQ) sont perpendiculaires .

d)Démontrer que le point d'intersection I des droites (PB) et (AQ) est sur le cercle C .

Exercice 32 :

Soit ABC un triangle rectangle en A, et soit H le pied de la hauteur issue de A.

Soit M un point du segment [BC], distinct de B et de C.

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AM] coupe le côté [AB] en I et le côté [AC] en J .

a)Démontrer que le point H appartient au cercle $\mathcal{C}$.

b)Démontrer que AIMJ est un rectangle .

c)Démontrer que le milieu O du segment [AM] appartient à la médiatrice de [AH] .

d)Démontrer que le triangle IHJ est rectangle en H .

Exercice 33 :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] et de centre O.

Soit C le symétrique de O par rapport à B. Soit D un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$.
La perpendiculaire d en C à la droite (AB) coupe (AD) en E et la droite (BD) en F.

Démontrer que les droites (EB) et (AF) sont perpendiculaires.

Exercice 34 :

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre [OA].

Soit P un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A. La droite (PA) recoupe le cercle $\mathcal{C}'$ en I. La droite (PO) recoupe le cercle $\mathcal{C}'$ en M.

La perpendiculaire à la droite (AO) passant par P coupe (AO) en H.

Démontrer que les droites (AM) , (IO) et (PH) sont concourantes .

Exercice 35 :

Soit , sur une droite D , trois points B , C et H pris dans cet ordre .
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [BC] et soit D' la droite passant par H et perpendiculaire à D.
Soit A un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de B et de C.

Les droites (AB) et (AC) coupent la droite D' en E et F.

a)Démontrer que les droites (BE) et (FC) sont perpendiculaires.

b)Démonter que les quatre points A , C , H et E appartiennent à un même cercle . Quel est son centre ?

c)Démontrer que les droites (BF) et (CE) sont sécantes sur le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 36 :

Soit M un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle ABC.

Démontrer que les symétriques de M par rapport aux supports des côtés du triangle sont sur une même droite passant par l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 37 : Triangle isocèle

Soit ABC un triangle tel que la médiatrice de BC passe par A.

Démontrer que ABC est isocèle en A .

Exercice 38 : Triangle isocèle

Soit ABC un triangle tel que la médiane issue de A est aussi hauteur.

Démontrer que ABC est isocèle en A.

Exercice 39 : Triangle isocèle

POL est un triangle isocèle en O. Le point I est le symétrique de O par rapport à la droite (PL).

Quelle est la nature du quadrilatère POLI ? Justifier .

Exercice 40 :

Soit AIX un triangle rectangle en A. Les bissectrices issues de X et de I se coupent en D.

Déterminer la mesure de l'angle DAX.

Exercice 41 :

Soit LAC un triangle isocèle en L. Les médianes issues de A et de C se coupent en U.

Démontrer que la droite (LU) est perpendiculaire à (AC).

Exercice 42 :

Soit A, B et C trois points sur un cercle C de centre O. La perpendiculaire à (BC) passant par O coupe (BC) en I et la perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (AB) en J. Les droites (AI) et (CJ) se coupent en L. Démontrer que (BL) coupe le segment [AC] en son milieu.

Exercice 43 :

Soit un triangle JFC isocèle en C. La médiane issue de C coupe la bissectrice de F en O.

Démontrer que(OJ) est la bissectrice de l'angle de sommet J.

Exercice 44 :

Dans un triangle ABC , les bissectrices des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ se coupent en un point I .

La parallèle à (BC) passant par I coupe [AB] en M et [AC] en N .

Démontrer que le périmètre du triangle AMN est égal à AB + AC.

Exercice 45 :

Soit EST un triangle . Les hauteurs issues de E et de S se coupent en O . La droite (OT) coupe la droite (ES) en U . Soit D le milieu de [TS] .

Démontrer que le triangle SUD est isocèle.

Exercice 46 :

Soit AIN un triangle rectangle en A . Les bissectrices des angles A et N se coupent en O . La droite (OI) coupe la droite (AN) en R. La perpendiculaire à la droite (IN) passant par R coupe la droite (IN) en S.

Démontrer que le triangle ARS est isocèle.

Exercice 47 :

Soit IREM un quadrilatère dont les diagonales se coupent en O . Le cercle de diamètre [MI] coupe la droite (EI) en T et le cercle de diamètre [RE] coupe la droite (MR) en U . Les droites (MT) et (EU) sont sécantes en D .

Démontrer que la perpendiculaire à la droite (EM) passant par O passe aussi par le point D .

Exercice 48 :

Dans un trapèze TRAP , de bases [TR] et [PA] , on appelle I et J les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles TRP et TRA .

Montrer que les droites (IJ) et (PA) sont perpendiculaires .

Exercice 49 :

D'un même côté d'une droite d, placer deux points E et F .

Construire le point U symétrique du point E par rapport à la droite d . La médiatrice du segment [EF] coupe d en I . La perpendiculaire à (UF) passant par I coupe (UF) en G .

Démontrer que G est le milieu du segment [UF] .

Exercice 50 :

Etant donné un triangle ABC , construire les points E , F et G tels que les quadrilatères ABEC , BCFA et CAGB soient des parallélogrammes .

Démontrer que les droites (AE) , (BF) et (CG) sont concourantes .

Exercice 51 :

Sur un cercle de centre O, de 4 cm de rayon, placer deux points A et B distants de 5 cm. On appelle I le milieu du segment [AB] .La bissectrice de l'angle OÂB coupe le segment [OI] en J.

Démontrer que la droite (BJ) est bissectrice de l'angle ABO.

Exercice 52 :

Soit un segment [TS] et sa médiatrice d . Sur la droite d, placer un point R qui ne soit pas un point de [TS].

Construire le point M, symétrique du point T par rapport au point R.

a)Montrer que le point R est un point de la médiatrice du segment [TM] et en déduire que R est le centre du cercle circonscrit au triangle MTS.

b)On appelle I le milieu du segment [MS] . Montrer que la droite (RI) est la médiatrice du segment [MS].

c)Montrer que les droites (RI) et (TS) sont parallèles . En déduire la nature du triangle MTS.

d)Existe-t-il une autre méthode pour déterminer la nature du triangle MTS ?

Exercice 53 :

Soit un triangle MER isocèle, de sommet principal E. On appelle N le symétrique du point M par rapport au point E.

Quelle est la nature du triangle MRN ? Pourquoi ?

Exercice 54 :

Soit un parallélogramme ABCD. On appelle E le symétrique de D par rapport à C Les droites (AD) et (BE) se coupent en F.

a)Montrer que le point B est le milieu du segment [EF].

b)Les droites (DB) et (FC) se coupent en G. Montrer que les points E, G et A sont alignés.

Exercice 55 :

Sur un cercle C de centre O, placer deux points M et R qui ne sont pas diamétralement opposés et tels que (MO) et (OR) ne sont pas perpendiculaires.

Les tangentes en M et R se coupent en B. La droite (RO) coupe la droite (BM) en C. La droite (MO) coupe la droite (BR) en A.

a)Montrer que (BO) est bissectrice de l'angle MBR.

b)Montrer que les droites (BO) et (AC) sont perpendiculaires .

c)Montrer que le triangle BAC est isocèle .

Exercice 56 :

Tracer deux droites d_1 et d_2 sécantes en O et placer un point A en dehors de ces deux droites .

Pour obtenir une figure claire, on pourra tracer d_1 et d_2 formant un angle de 65° et placer A à 3 cm de d_1 et à 4 cm de d_2.

a)Construire tous les triangles dont un sommet est le point A et quia admettent d_1 et d_2 comme médiatrices de leurs côtés.

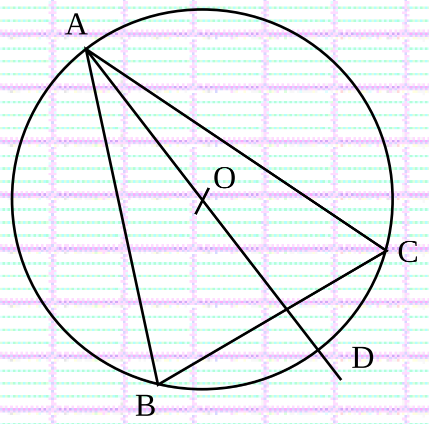
b)Que peut-on dire du cercle de centre O et de rayon [OA] ?

Exercice 57 :

Soit C un point d'un cercle de diamètre [AB]. Soient E et F les symétriques de A et B par rapport au point C.

Démontrer que le quadrilatère ABEF est un losange.

Exercice 58 : Brevet des Collèges (Problème) – Bordeaux – 1994



A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O et [AD] un diamètre de ce cercle.

On complètera la figure fournie au fur et à mesure de la résolution du problème.

1. Quelle est la nature des triangles ABD et ACD ?

2. La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E. Démontrer que (CE) est une hauteur du triangle ABC.

3. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le cercle en A et J, la droite (CE) en H et la droite (BC) en I.

 a)Que représente H pour le triangle ABC ?

 b)En déduire que (BH) est perpendiculaire à (AC).

 c)Montrer que (BH) est parallèle à (CD).

4. Démontrer que BHCD est un parallélogramme. On appelle K le point d'intersection de ses diagonales.

 Que représente K pour le segment [HD]

5. a) Quelle est la nature du triangle ADJ ? En déduire que (CI) et (DJ) sont parallèles.

 b) Montrer que I est le milieu de [HJ] (on pourra utiliser le triangle HDJ, après avoir précisé la position de K sur le segment [HD]).