THEME 8

DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE - EXERCICES CORRIGES SERIE 3

Exercice 14 :

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Soient A' ,B' et C' les milieux des côtés respectifs [BC] , [AC] et [AB].

a)Montrer que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles. En déduire que les droites (OA') et (B'C') sont perpendiculaires.

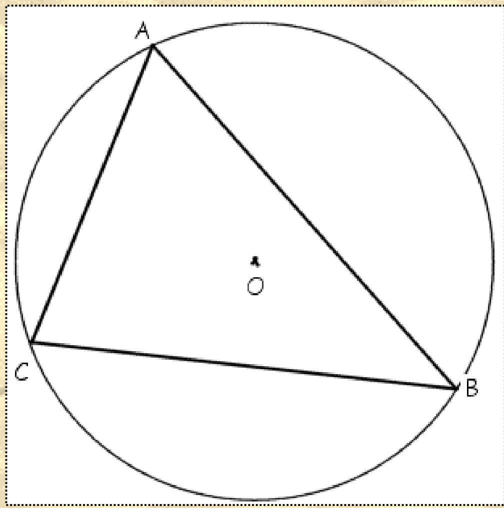
b)Que représente la droite (OA') pour le triangle A'B'C' ?

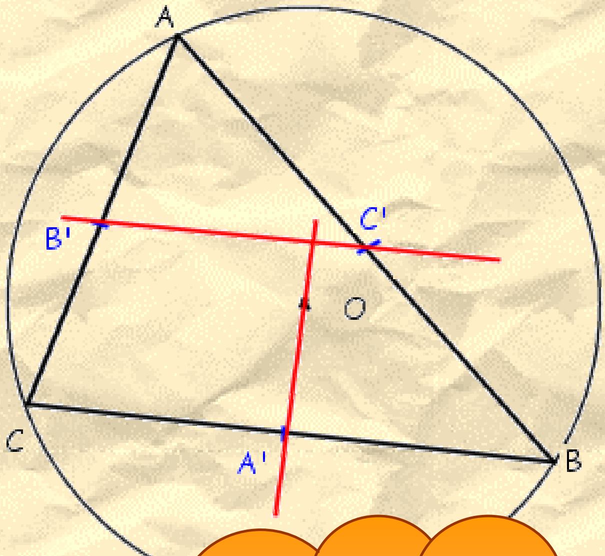
c)Démontrer que le point O est l'orthocentre du triangle A'B'C' .

Solution :

On demande de tracer un triangle ABC et son cercle circonscrit.

Vous pouvez tracer, dans l'ordre, un triangle, puis construire les médiatrices (2 suffisent), puis tracer le cercle circonscrit. Un autre moyen consiste à tracer un cercle de centre O, puis de tracer un triangle inscrit dans ce cercle .

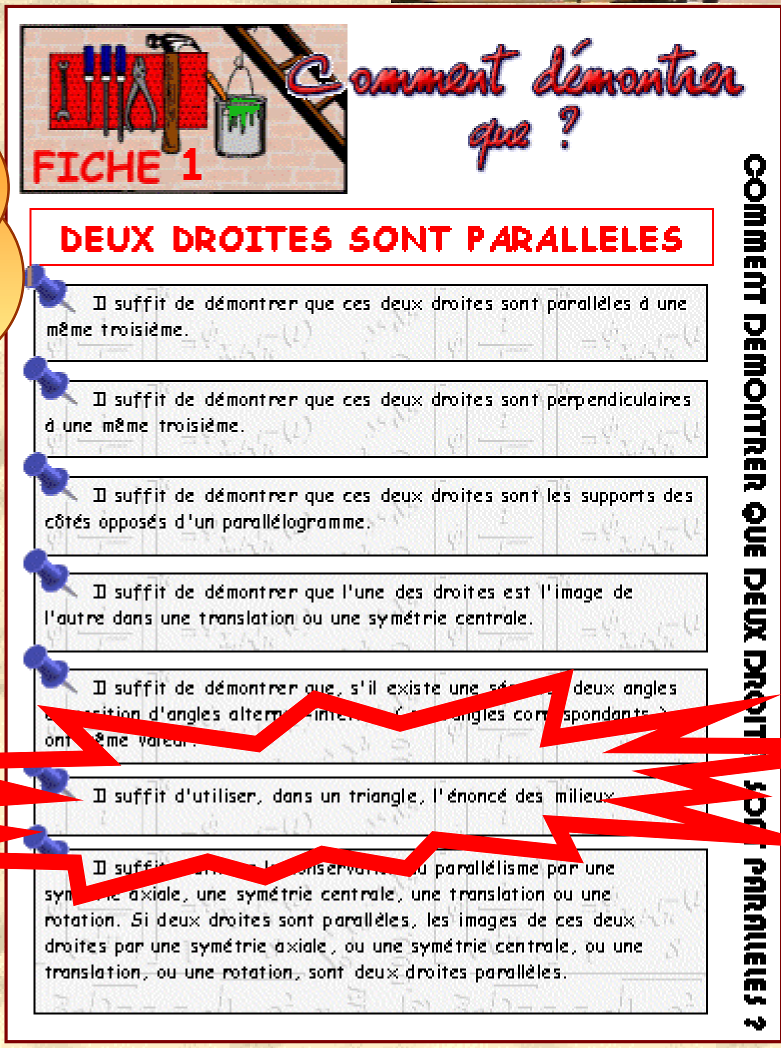




a)Les droites (BC) et (B'C') sont-elles parallèles ?

Comment démontrer que deux droites sont

La droite (B'C') est définie par deux points B' et C' qui sont milieux de deux côtés du triangle ABC.
Cette information doit vous conduire à utiliser le théorème des milieux.


FICHE 1

Comment démontrer que ?

COMMENT DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES ?

DEUX DROITES SONT PARALLELES

- Il suffit de démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même troisième.
- Il suffit de démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires à une même troisième.
- Il suffit de démontrer que ces deux droites sont les supports des côtés opposés d'un parallélogramme.
- Il suffit de démontrer que l'une des droites est l'image de l'autre dans une translation ou une symétrie centrale.
- Il suffit de démontrer que, s'il existe une [illegible] deux angles [illegible]sition d'angles alternes-inte[illegible] angles correspondants [illegible] ont [illegible]ême valeur.
- Il suffit d'utiliser, dans un triangle, l'énoncé des milieux.
- Il suffit [illegible] conservation du parallélisme par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation ou une rotation. Si deux droites sont parallèles, les images de ces deux droites par une symétrie axiale, ou une symétrie centrale, ou une translation, ou une rotation, sont deux droites parallèles.

Redaction :

▶ a) Parallélisme des droites (BC) et (B'C') :

Dans le triangle ABC :

B' est le milieu de [AC] (hypothèse)

C' est le milieu de [AB] (hypothèse)

D'après le théorème des milieux ,

(B'C') et (BC) sont parallèles.

Théorème des milieux

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

▶ Les droites (OA') et (B'C') sont-elles perpendiculaires ?

Nature de la droite (OA')

A' est le milieu du segment [BC] (hypothèse)

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (hypothèse)

Donc la droite (OA') est, dans le triangle ABC, <u>la médiatrice du côté [BC]</u>

$(OA') \perp (BC)$ (la droite (OA') est la médiatrice de [BC] – cf. ci-dessus)

(BC) // (B'C') (question précédente)

D'après la propriété suivante : " Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. "

$\boxed{(OA') \perp (B'C')}$

<u>b)Nature de la droite (OA') pour le triangle A'B'C' :</u>

Dans le triangle A'B'C',

la droite (OA') passe par le sommet A'.

la droite (OA') est perpendiculaire au côté [B'C']

donc

(OA') est la hauteur issue de A' dans le triangle A'B'C' .

<u>c)Nature du point O pour le triangle A'B'C' :</u>

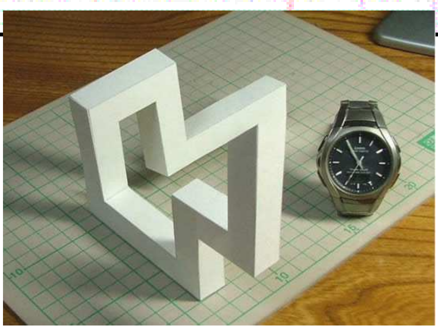
De la même façon que dans la question (a), nous pouvons démontrer que les droites (A'B') et (AB) sont parallèles puis que les droites (OC') et (A'B') sont perpendiculaires.

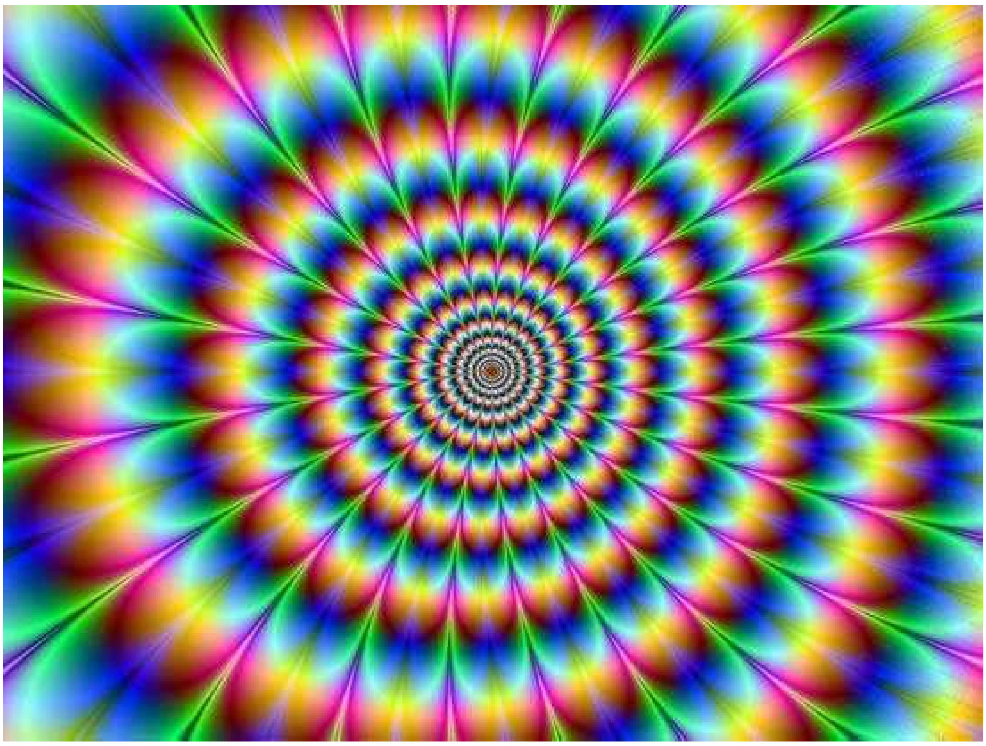
Par suite, nous pouvons démontrer, comme à la question (b), que (OC') est, dans le triangle A'B'C', la hauteur issue de C'.

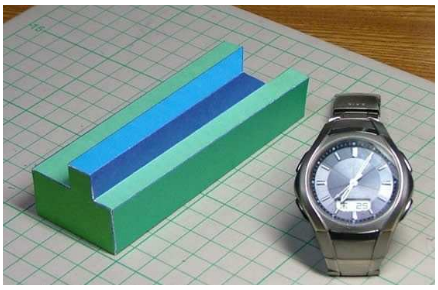
Ces deux hauteurs (OA') et (OC') sont sécantes en O ;

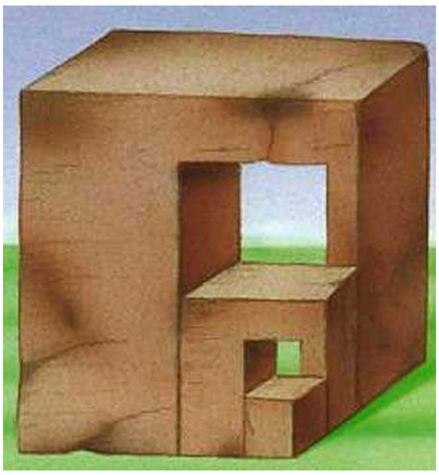
Donc

O est l'orthocentre du triangle A'B'C'









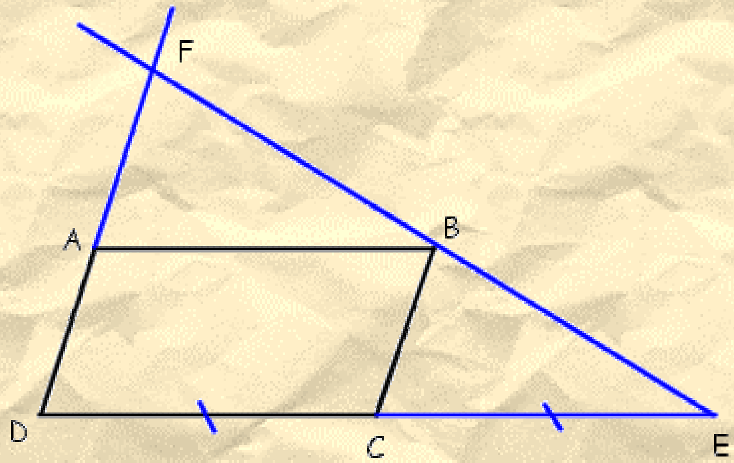
Exercice 16 :

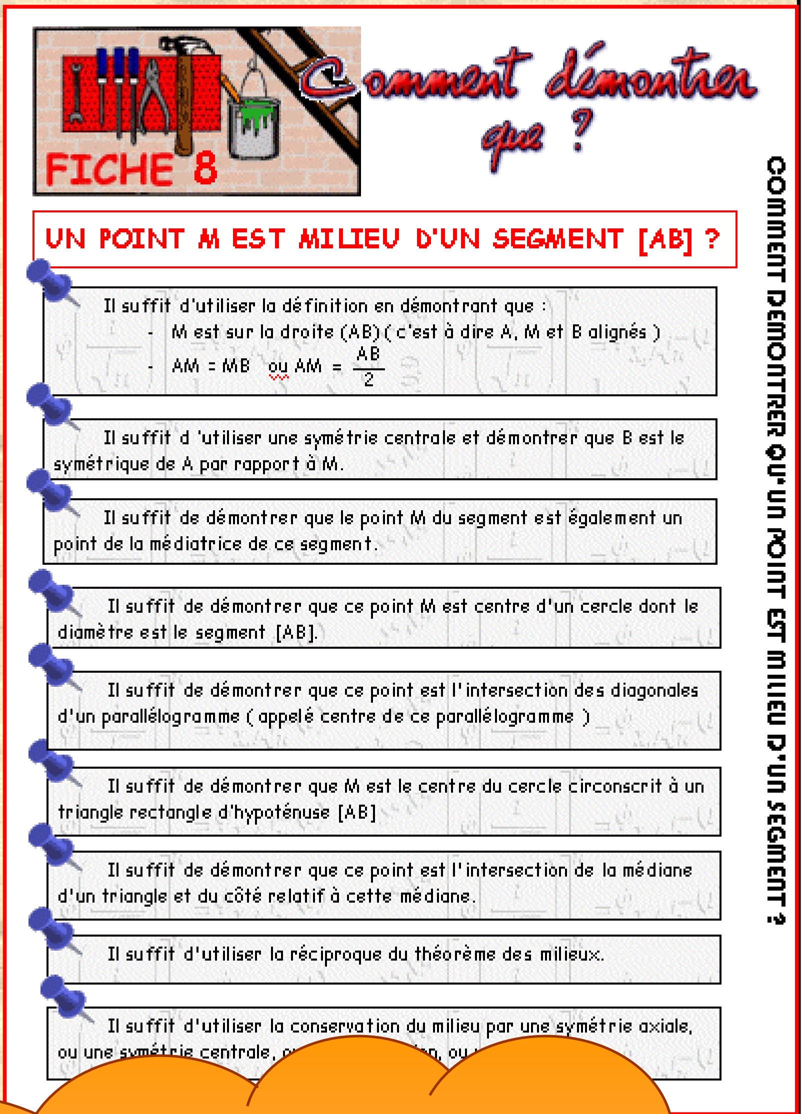
Soit un parallélogramme ABCD. On appelle E le symétrique de D par rapport à C. Les droites (AD) et (BE) se coupent en F.

a)Montrer que le point B est le milieu du segment [EF].

b)Les droites (DB) et (FC) se coupent en G. Montrer que les points E, G et A sont alignés.

Solution :





FICHE 8

Comment démontrer que ?

COMMENT DEMONTRER QU'UN POINT EST MILIEU D'UN SEGMENT ?

UN POINT M EST MILIEU D'UN SEGMENT [AB] ?

Il suffit d'utiliser la définition en démontrant que :

- M est sur la droite (AB) (c'est à dire A, M et B alignés)
- AM = MB ou AM = $\frac{AB}{2}$

Il suffit d 'utiliser une symétrie centrale et démontrer que B est le symétrique de A par rapport à M.

Il suffit de démontrer que le point M du segment est également un point de la médiatrice de ce segment.

Il suffit de démontrer que ce point M est centre d'un cercle dont le diamètre est le segment [AB].

Il suffit de démontrer que ce point est l'intersection des diagonales d'un parallélogramme (appelé centre de ce parallélogramme)

Il suffit de démontrer que M est le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle d'hypoténuse [AB]

Il suffit de démontrer que ce point est l'intersection de la médiane d'un triangle et du côté relatif à cette médiane.

Il suffit d'utiliser la réciproque du théorème des milieux.

Il suffit d'utiliser la conservation du milieu par une symétrie axiale, ou une symétrie centrale,

<u>a)Milieu de [EF] :</u>

Pour répondre à cette question, je dois chercher dans la fiche « Comment démontrer qu'un point est milieu ? »

Mais quelle méthode utiliser ?

Il est question de parallélogramme. Nous savons que les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu. Mais le point B n'est pas un point particulier des diagonales !?!

Gardons en mémoire que, puisque la figure est un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles .

Enfin, nous avons tracé le symétrique d'un point. Cette notion fait appel , par définition , au milieu d'un segment.

Parallèles , milieu …

Une propriété utilisant ces deux notions permet de démontrer qu'un point est milieu : c'est la réciproque du théorème des milieux.

Rédaction :

Dans le triangle DEF :

- ▶ C est le milieu de [DE] (E est le symétrique de D par rapport à C)
- ▶ (BC) est parallèle à (AD) (côtés opposés du parallélogramme ABCD)

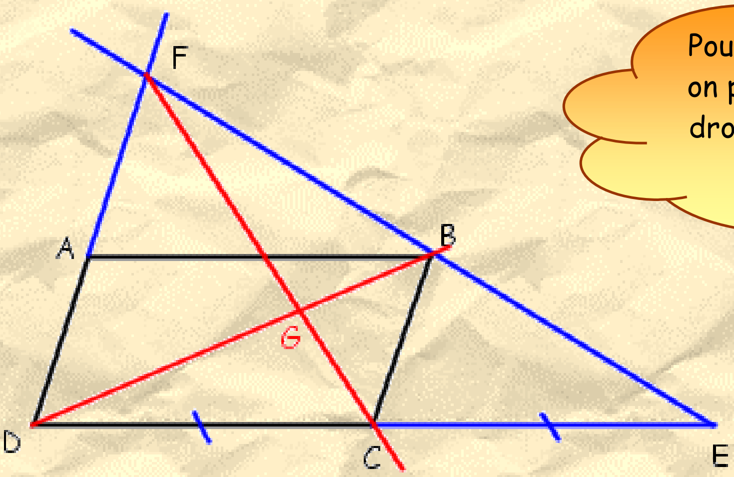
donc , d'après la réciproque du théorème des milieux ,

$\boxed{\text{B est milieu de [AE]}}$

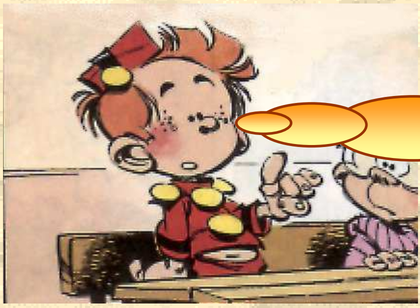
Réciproque du théorème des milieux

Dans un triangle, la droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

b)Les points E, G et A sont-ils alignés ?



Pour démontrer que les points sont alignés, on peut démontrer que le point G est sur la droite (AE), c'est à dire , démontrer que la droite (AE) passe par G.



La droite (DB) est une médiane car elle passe par B milieu de [FE] . La droite (FC) est également une médiane car C est milieu de [DE].
Donc G est le centre de gravité du triangle.
(AE) est la troisième médiane donc elle passe par G centre de gravité.

Mais vous ignorez que (AE) est la troisième médiane. Elle passe par le sommet E du triangle DEF, mais A est-il milieu de [DF] ?
Nous devons donc montrer que cette droite est la troisième médiane, c'est à dire montrer que A est milieu de [DF] .

Milieu de [DF] :

Dans le triangle DEF,

▶ B est milieu de [FE] (question précédente)

▶ (AB) // (DE) (côtés opposés du parallélogramme ABCD)

donc, d'après le théorème des milieux ,

A est milieu de [DF].

Alignement des points A , G et E :

Dans le triangle DEF ,

▶ Nature de (DB) :

▷ D est un sommet du triangle.

▷ B est milieu de [EF] (question précédente)

Donc la droite (BD) est la médiane issue de D

▶ Nature de (FC) :

▷ F est un sommet du triangle.

▷ C est milieu de [DE] (E est le symétrique de D par rapport à C)

Donc la droite (FC) est la médiane issue de F

▶ Nature du point G :

Les médianes (BD) et (FC) se coupent en G ,

Donc G est le centre de gravité du triangle DEF.

▶ Nature de (EA) :

▷ E est un sommet du triangle.

▷ A est milieu de [DF] (cf. ci-dessus)

Donc la droite (EA) est la médiane issue de E

▶ Conclusion :

La droite (EA) étant une médiane du triangle DEF, passe par G.

Donc le point G est sur la droite (AE).

A , G et E sont alignés.

Exercice 19 :

Comment démontrer que les médianes sont concourantes ?

Soit ABC un triangle. Soient J et K les milieux respectifs de [AC] et [AB]. Les droites (CK) et (BJ) se coupent en G.

Soit A' le symétrique de A par rapport au point G.

a)Démontrer que les droites (BJ) et (A'C) sont parallèles (considérer pour cela le triangle AA'C).

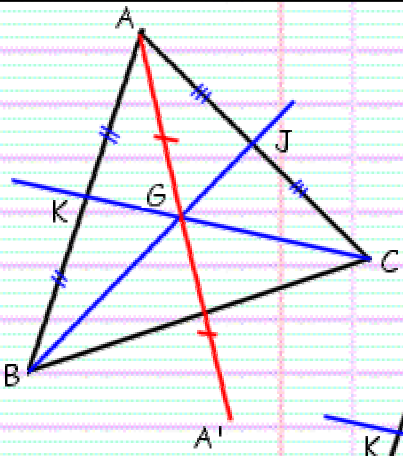
Démontrer, de même, que les droites (CK) et (A'B) sont parallèles.

b)Démontrer que le quadrilatère BGCA' est un parallélogramme .

c)Démontrer que (AG) est une médiane du triangle ABC .

d)Conclure .

Solution :



a)Les droites (BJ) et (A'C) sont-elles parallèles ?

Dans le triangle AA'C :

▶ G est milieu de [AA'] (A' est le symétrique de A par rapport à G)

▶ J est milieu de [AC] (hypothèse)

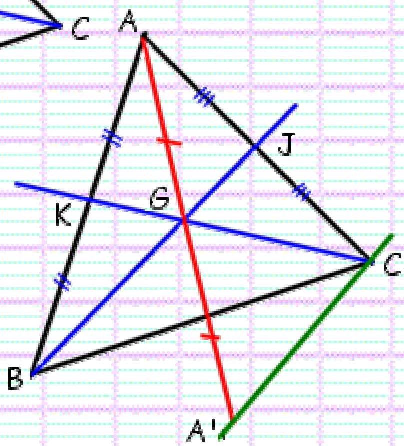
Donc, d'après le théorème des milieux

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

(GJ) est parallèle à (A'C)

c'est à dire

(BJ) est parallèle à (A'C)



Les droites (CK) et (A'B) sont-elles parallèles ?

De la même façon que précédemment , nous avons :

Dans le triangle AA'C :

▶ G est milieu de [AA'] (A' est le symétrique de A par rapport à G)

▶ K est milieu de [AB] (hypothèse)

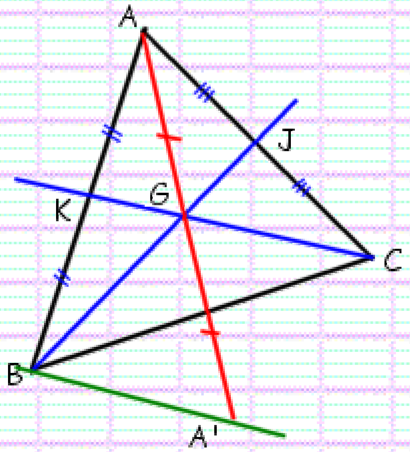
Donc, d'après le théorème des milieux

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

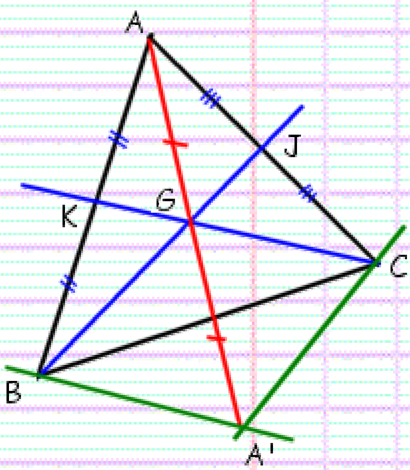
(GK) est parallèle à (A'B)

c'est à dire

(CK) est parallèle à (A'B)



b)Nature du quadrilatère BGCA' :



Dans le quadrilatère BGCA' ,

▶ (BG) est parallèle à (A'C) (question précédente)

▶ (CG) est parallèle à (A'B) (question précédente)

Les côtés opposés du quadrilatère BGCA' sont parallèles

Donc

BGCA' est un parallélogramme

c)Que représente (AG) pour le triangle ABC ?

BGCA' est un parallélogramme , donc les diagonales ont même milieu (ce point n'a pas de nom sur le dessin)

Donc la diagonale (GA') coupe le segment [BC] en son milieu

Donc la droite (AA') (les points A , G et A' sont alignés) coupe [BC] en son milieu. Cette droite qui passe par le sommet A du triangle ABC et par le milieu du côté [BC] est la médiane issue de A.

(AG) est une médiane du triangle ABC

d)Conclusion :

Dans le triangle ABC ,

- la droite (CK) est la médiane issue de C (elle passe par le sommet C et le milieu K de [AB])
- la droite (BJ) est la médiane issue de B (elle passe par le sommet B et le milieu J de [AC])
- la droite (AG) est la médiane issue de A (question précédente)

Le point G , intersection de (CK) et (BJ) , appartient à (AG), donc G appartient aux trois médianes du triangle ABC

Dans un triangle , les médianes sont concourantes.