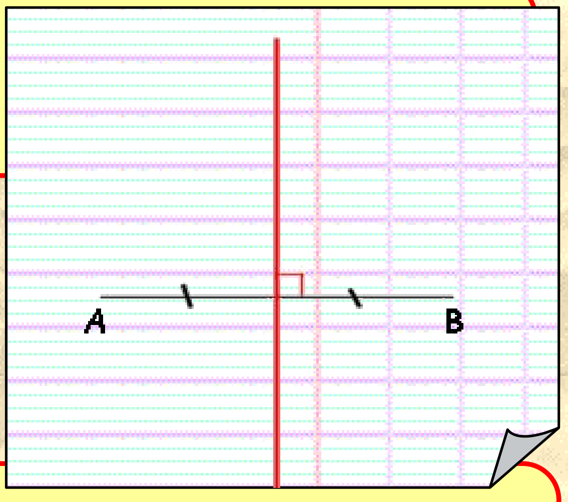
THEME 8

DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE

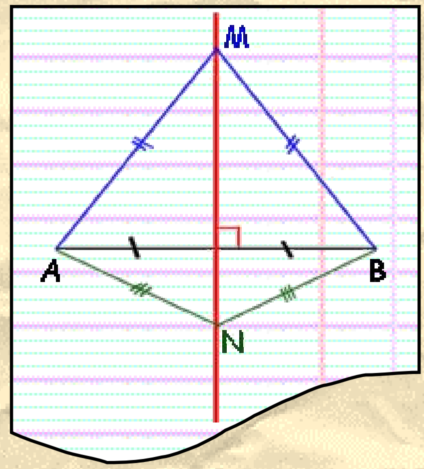
Médiatrice d'un segment (Rappels)

Définition :
La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par le milieu du segment.



Nous pouvons également dire :
La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

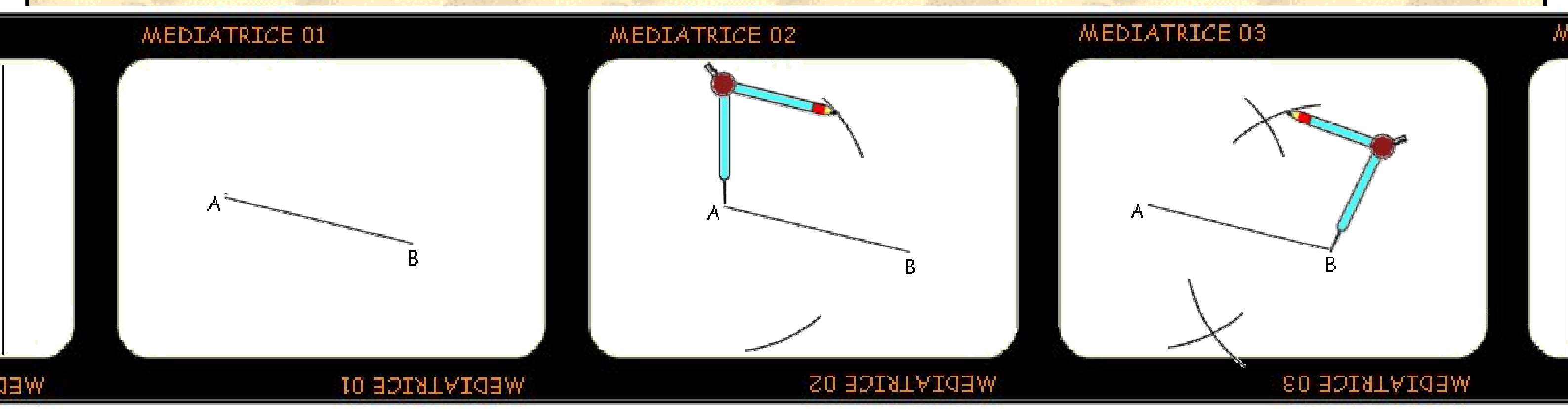
On dispose d'une autre définition de la médiatrice.

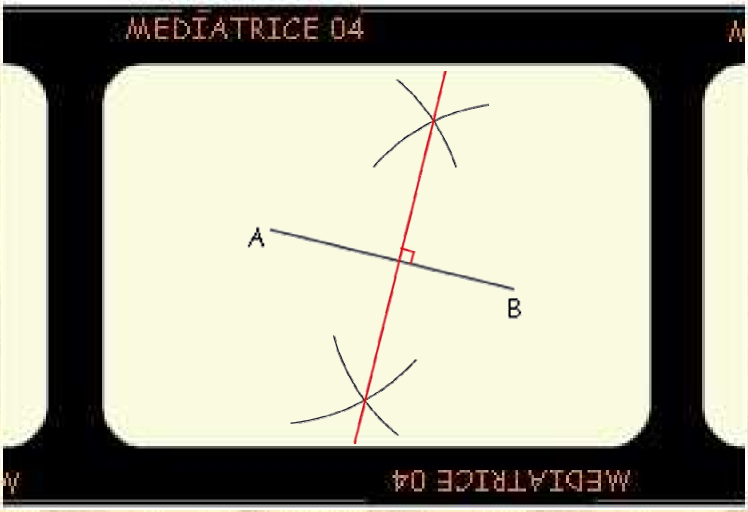


Définition :
La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des deux extrémités de ce segment.

Construction de la médiatrice d'un segment :

Cette dernière définition (chaque point de la médiatrice est à la même distance des extrémités de ce segment) permet de la construire au compas.





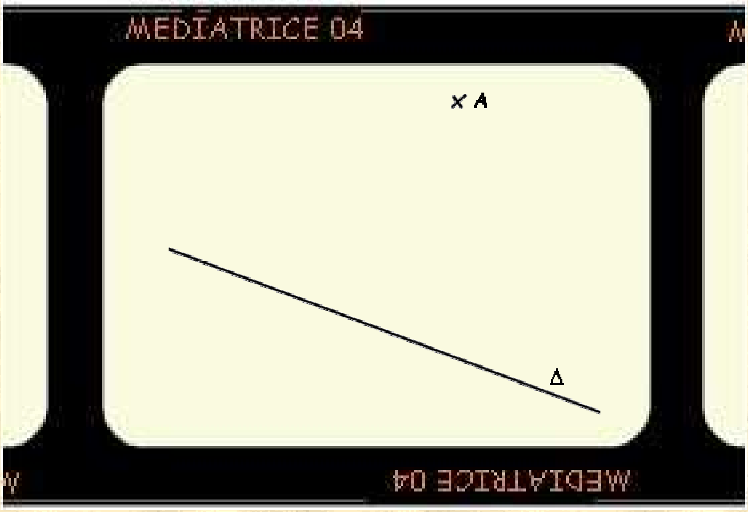
Remarque 1 :

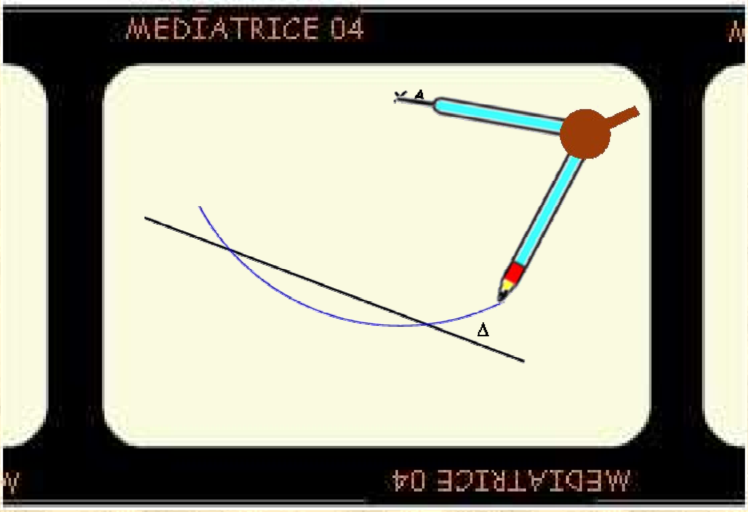
Cette construction permet également de construire le milieu d'un segment.

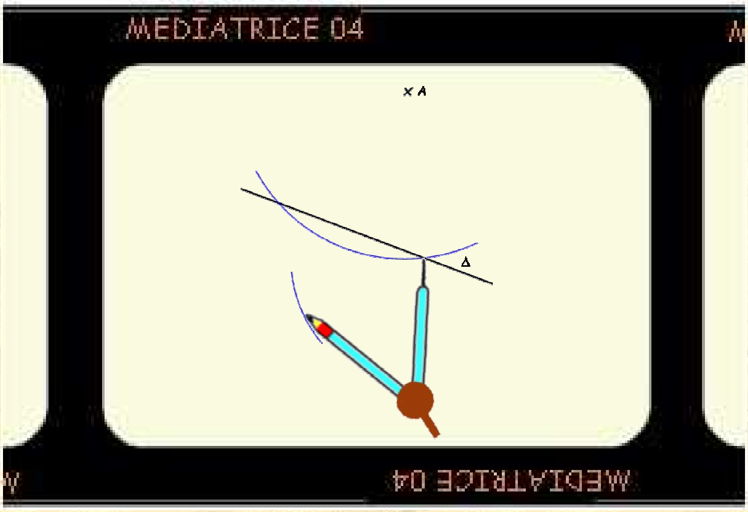
Remarque 2 : Construction de la perpendiculaire à une droite :

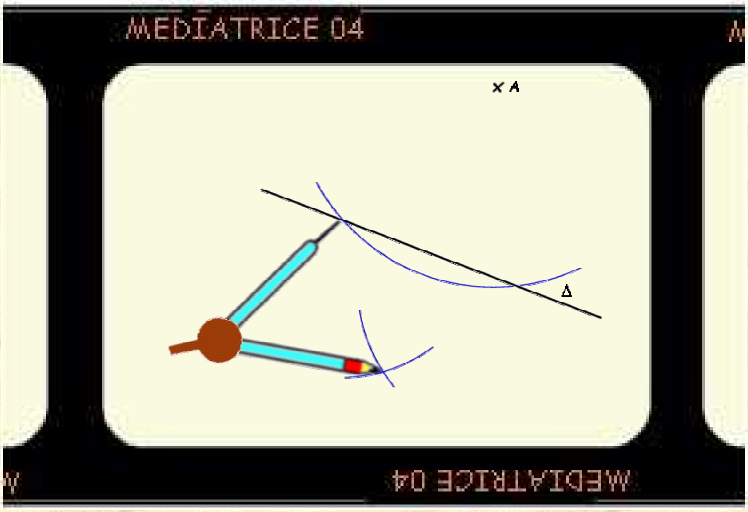
Soit Δ une droite et soit A un point.
Comment construire la perpendiculaire à cette droite passant par le point A ?

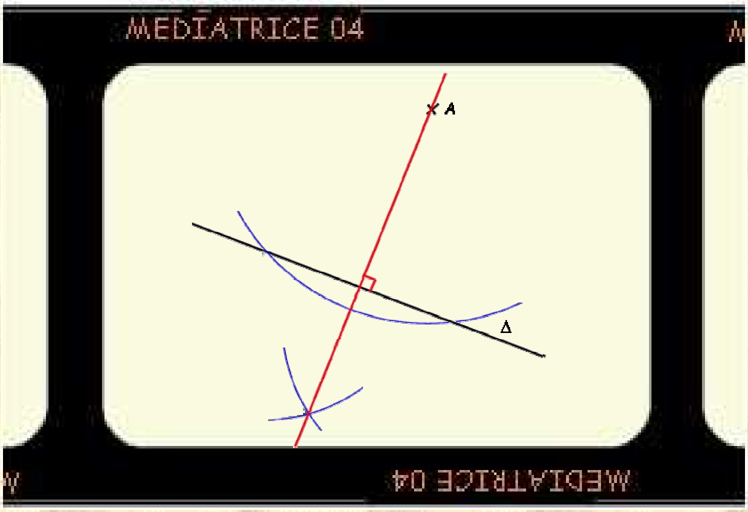
1er cas : Le point A n 'appartient pas à la droite Δ.



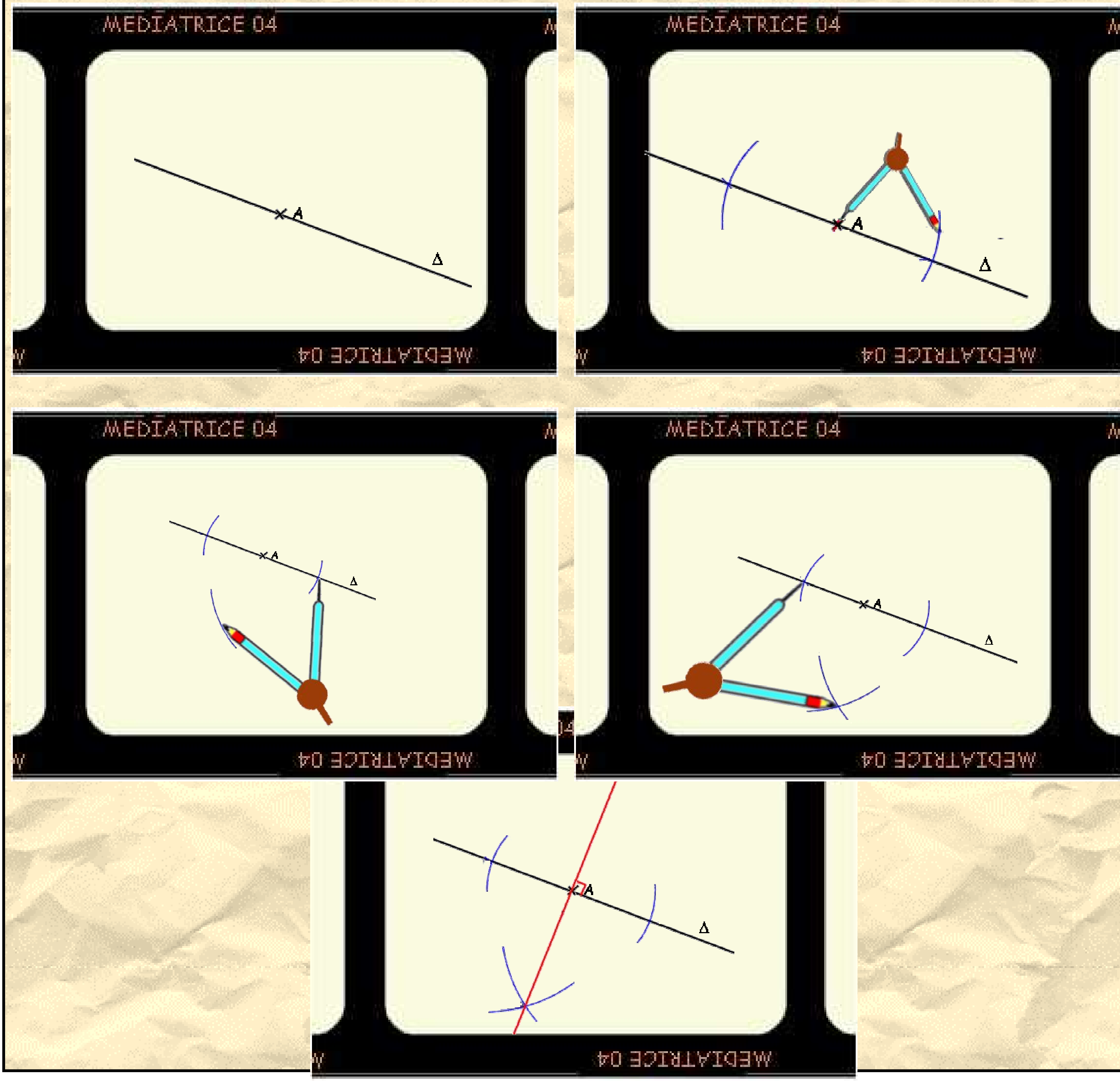








2ème cas : Le point A appartient à la droite Δ.



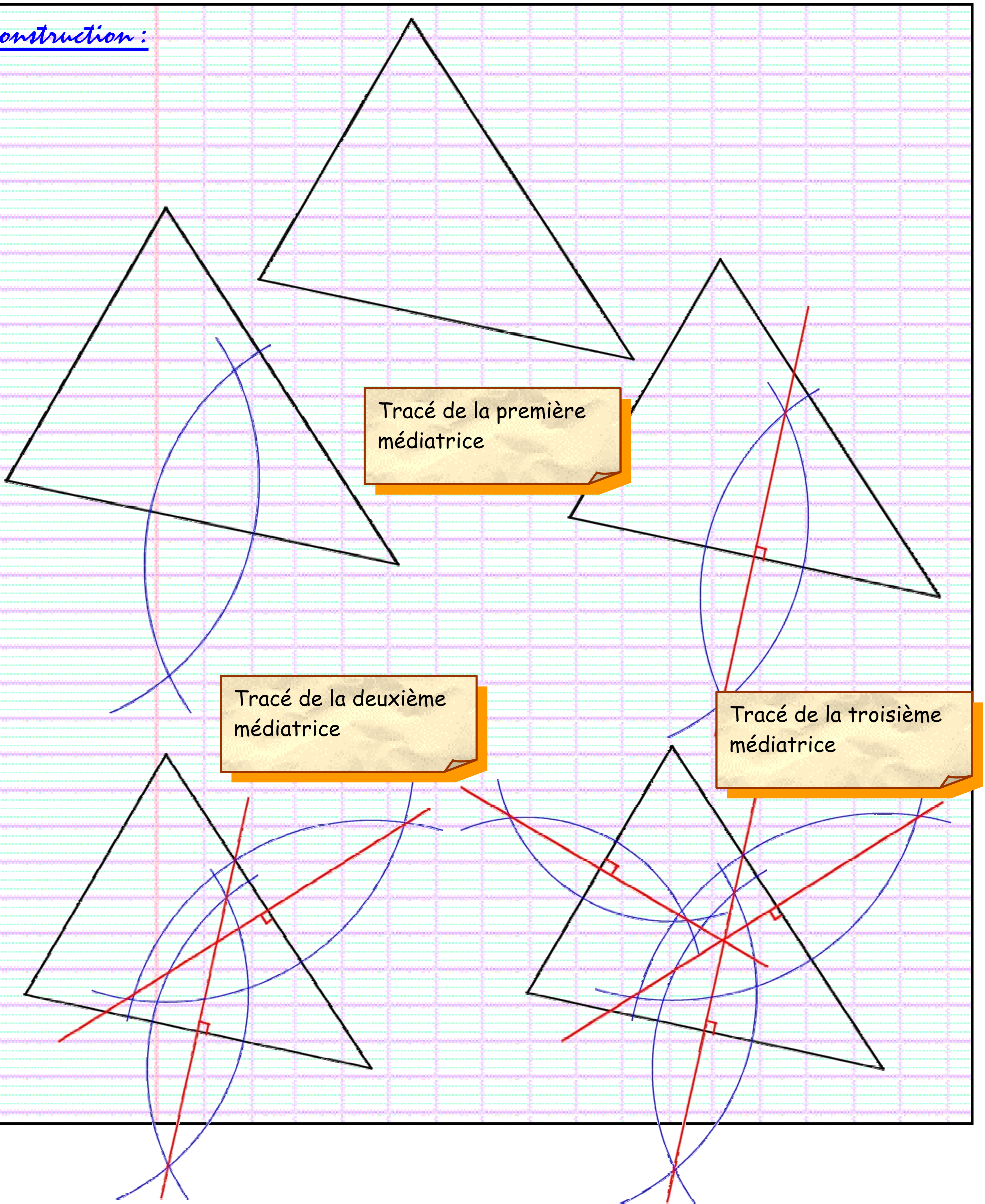
Médiatrices d'un triangle :

Un triangle ayant trois côtés a trois médiatrices.

Remarque :

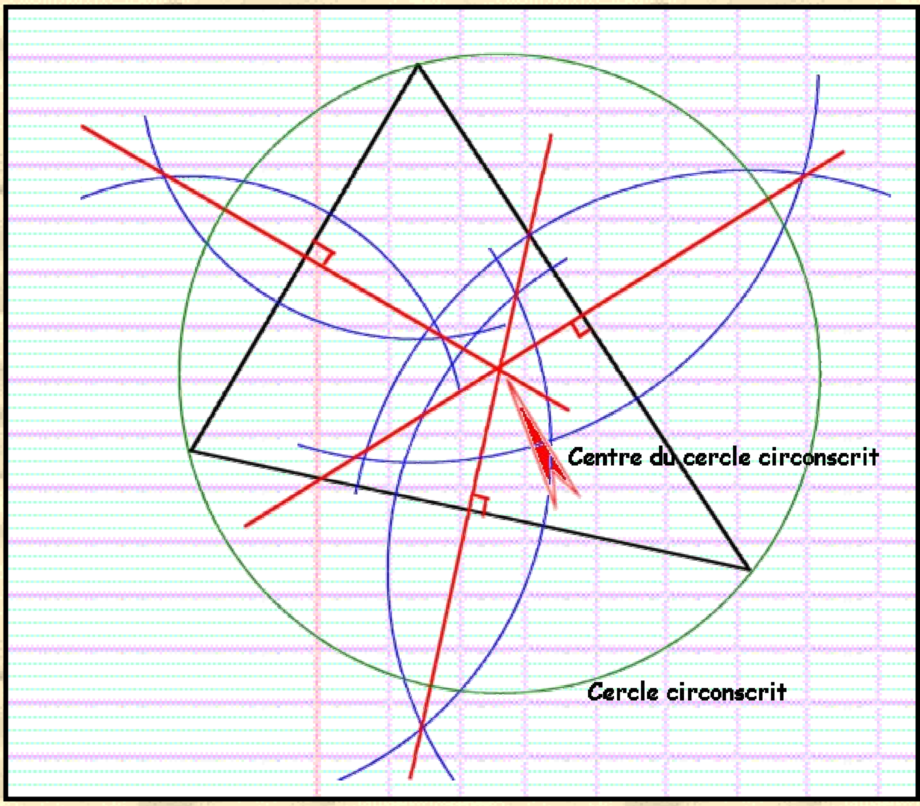
C'est par abus de langage que l'on parle de médiatrices d'un triangle. En fait, une médiatrice est toujours liée à un côté. Son véritable nom est « médiatrice d'un segment ». Nous devrions donc dire « médiatrices des côtés du triangle »

Construction :



Propriété :

Les médiatrices d'un triangle sont concourantes ; leur point de concours (point d'intersection) s'appelle « centre du cercle circonscrit » .



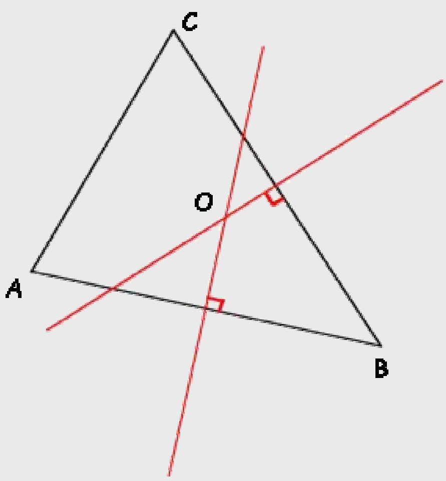
Circonscrire (verbe)

Tracer une ligne autour de quelque chose

Limiter la propagation, l'extension (d'une épidémie, d'un incendie)

(Petit Larousse)

Démonstration :



Soit ABC un triangle.

Considérons les médiatrices des côtés [AB] et [BC].

Si ces deux médiatrices étaient parallèles, les droites (AB) et (BC) qui sont perpendiculaires à ces deux médiatrices , seraient également parallèles. Ce qui est impossible (A, B et C sont trois points non alignés).

Les deux médiatrices sont donc sécantes en un point que nous appellerons O.

Le point O étant un point de la médiatrice du côté [AB], O est équidistant de A et de B.

Donc OA = OB (égalité 1)

Le point O étant un point de la médiatrice du côté [BC], O est équidistant de B et de C.

Donc OB= OC (égalité 2)

De ces deux égalités , nous pouvons affirmer :

$$OA = OB = OC$$

Donc le point O est équidistant des deux points A et C. Le point O est donc un point de la médiatrice du côté [AC].
Les trois médiatrices passent donc par un même point O, équidistant des trois sommets A, B et C .
Le cercle de centre O et de rayon [OA] passe donc par A , B et C . Ce cercle s'appelle le cercle circonscrit au triangle ABC.

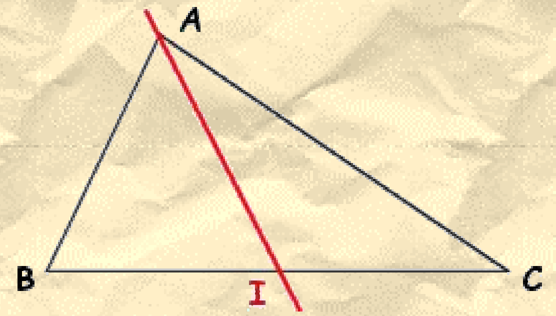
Médianes d'un triangle :

Définition :

Dans un triangle, une médiane est un segment joignant un sommet au milieu du côté opposé à ce sommet.

Remarque :

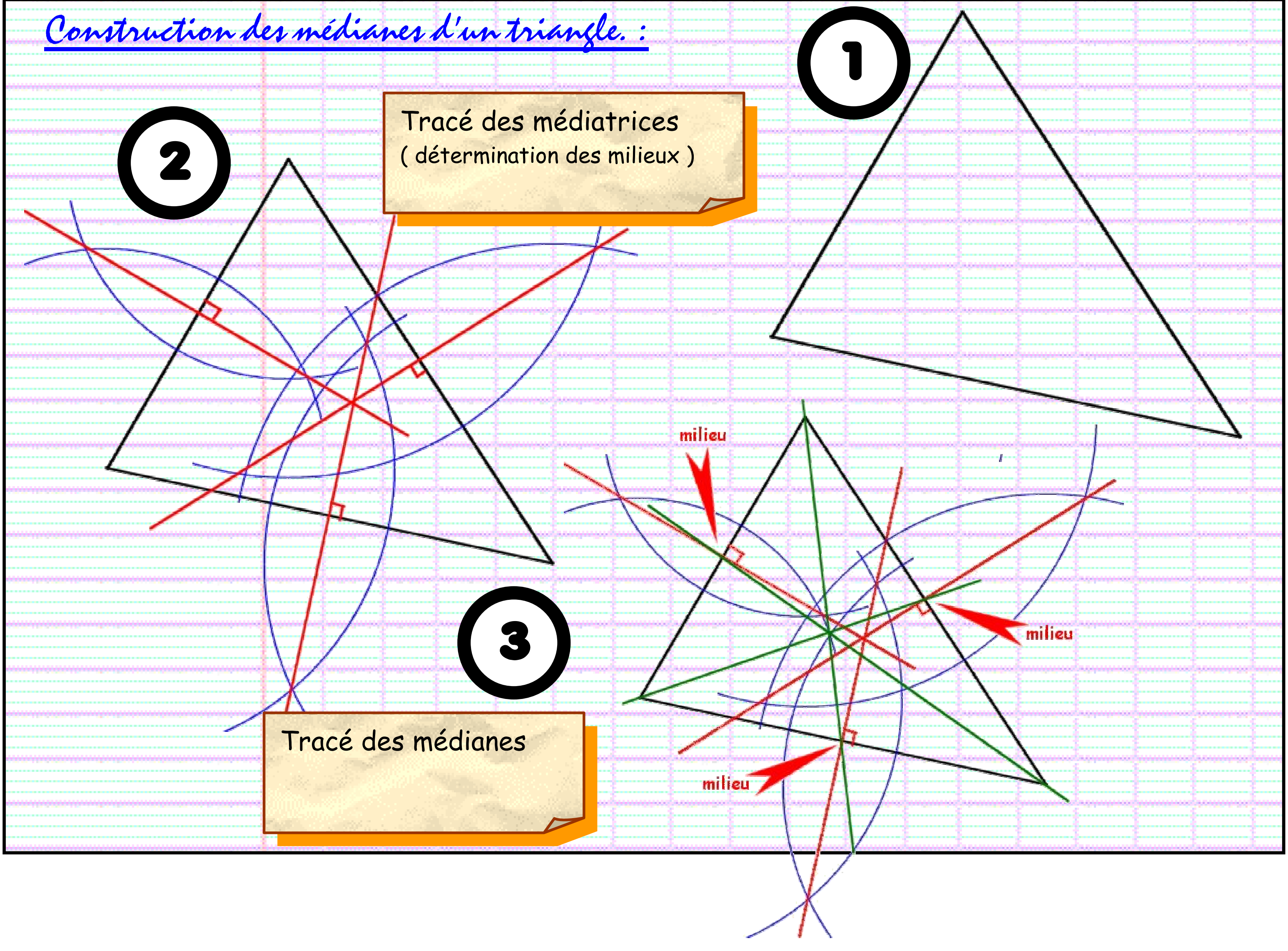
On appelle également médiane la droite (AI).
Par abus de langage, la mesure de segment [AI] peut également s'appeler médiane.



Remarque :

Pour construire dans un triangle une médiane, il est nécessaire de déterminer le milieu d'un côté. Ce milieu sera construit par le tracé de la médiatrice à ce côté.

Construction des médianes d'un triangle. :



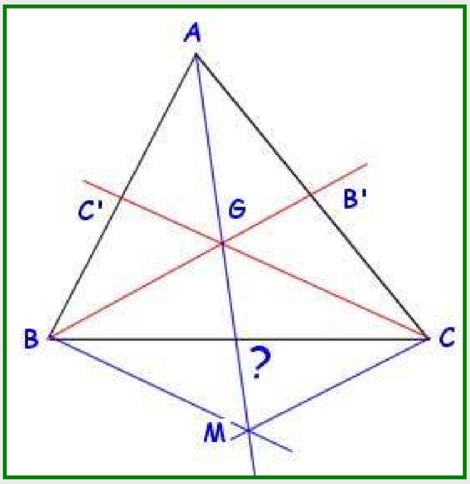
Propriété :

Les médianes d'un triangle sont concourantes ; leur point de concours (point d'intersection) s'appelle « centre de gravité » .

Démonstration :

Rappel : Théorème des milieux

" Dans un triangle, la droite passant par 1es milieux de deux côtés est parallèle au troisième . "



Soit ABC un triangle. Soient C' le milieu de [AB] et B' le milieu de [AC].

Soit G le point d'intersection des deux médianes (CC')e t (BB').
Soit M le symétrique du point A par rapport à G.

Nature du quadrilatère BGCM ?

Dans le triangle ABM,
G est milieu de [AM] (M est le symétrique de A par rapport à G)
C' est milieu de [AB] (hypothèse)
Donc, d'après le théorème des milieux, les droites (C'G) et (BM) sont parallèles.

(C'G) // (BM)

Comme les points C, G et C' sont alignés , alors (GC) // (BM)

Dans le triangle ACM,
G est milieu de [AM] (M est le symétrique de A par rapport à G)
B' est milieu de [AC] (hypothèse)
Donc, d'après le théorème des milieux, les droites (B'G) et (CM) sont parallèles.

(B'G) // (CM)

Comme les points B G et B' sont alignés , alors (BG) // (CM)

(GC) // (BM) et (BG) // (CM)

Les côtés opposés du quadrilatère BGCM sont parallèles, donc BGCM est un parallélogramme.

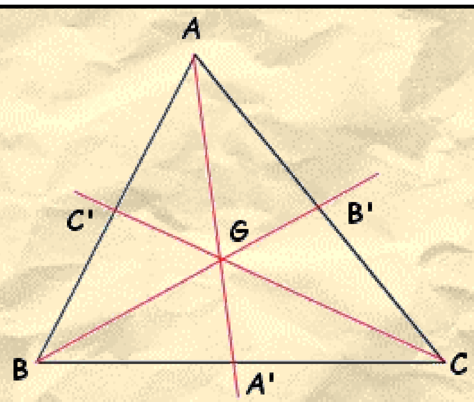
Conclusion :

Dans un parallélogramme, les diagonales ont même milieu.
Donc la droite (GM) coupe [BC] en son milieu.
Comme les points A, G et M sont alignés, en remplaçant (GM) par (AG) , nous pouvons affirmer que
(AG) coupe [BC] en son milieu.
La droite (AG) passe par le sommet A du triangle et par le milieu du côté opposé [BC] , donc
(AG) est la médiane issue de A dans le triangle ABC.

Les trois médianes sont donc concourantes en G.

Propriété :

Le point de concours des médianes appelé centre de gravité est situé sur chacune d'elles aux deux tiers de sa longueur à partir du sommet , ou au tiers à partir de la base.

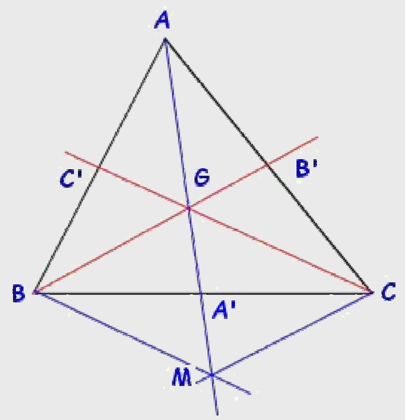


$$GA = \frac{2}{3} AA' \qquad GB = \frac{2}{3} BB' \qquad GC = \frac{2}{3} CC'$$

et (ou)

$$GA' = \frac{1}{3} AA' \qquad GB' = \frac{1}{3} BB' \qquad GC' = \frac{1}{3} CC'$$

Démonstration :



Il existe différentes démonstrations. – Cf. exercices concernant les droites remarquables d'un triangle.
Poursuivons la démonstration commencée ci-dessous.
Nous avons démontré que (AG) est la médiane issue de A dans le triangle ABC.
Appelons donc A' son point d'intersection avec [BC]. Rappelons que A' est le milieu de [BC]
Le point A' est le centre du parallélogramme BGCM, donc A' est le milieu de [GM].
Nous avons donc :

$$GA' = A'M = \frac{GM}{2}$$

Or AG = GM (M est le symétrique de A par rapport à G , donc G est le milieu de [AM])

Donc $\quad GA' = \frac{GA}{2} \quad$ et donc $\quad GA = 2\ GA'$

$$\underline{AA'} = AG + GA' = 2\,GA' + GA' = \underline{3\,GA'}$$

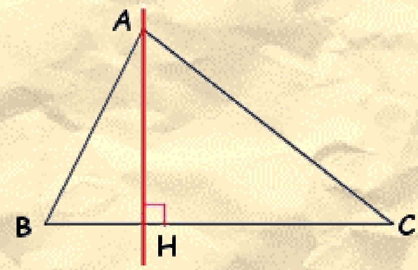
Donc $\quad GA' = \frac{AA'}{3} = \frac{1}{3} AA'$

Les autres égalités se démontrent de manière identique.

Hauteurs d'un triangle :

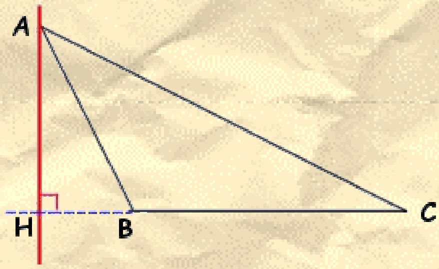
Définition :

Dans un triangle, une hauteur est une droite issue d'un sommet et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.



Remarque :

On appelle également hauteur le segment [AH] , ainsi que la longueur AH. Nous dirons que la hauteur [AH] est la hauteur issue de A , ou la hauteur relative au côté [BC] (ou au sommet A)

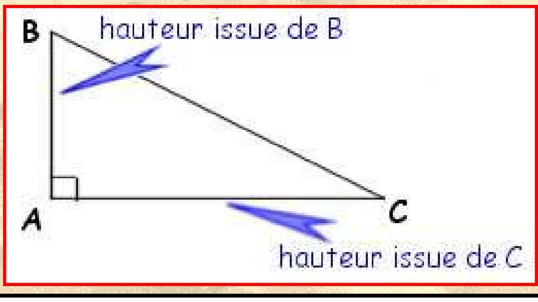


Remarque :

➤ Si une médiane (considérée comme segment) est toujours située à l'intérieur du triangle, une hauteur peut être totalement extérieure au triangle.

➤ Si le triangle est obtusangle , c'est à dire si un de ses angles est obtus, deux de ses hauteurs « tombent » à l'extérieur du triangle.

➤ Si le triangle est rectangle, deux de ses hauteurs sont confondues avec les côtés de l'angle droit.(figure ci-contre)



Remarque :

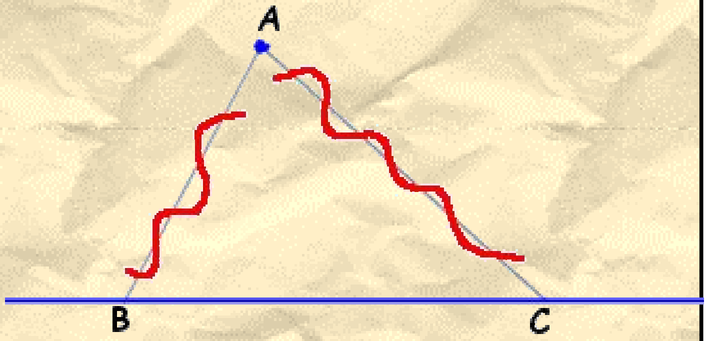
Le point H s'appelle le pied de la hauteur issue de A.

Un triangle a trois hauteurs.

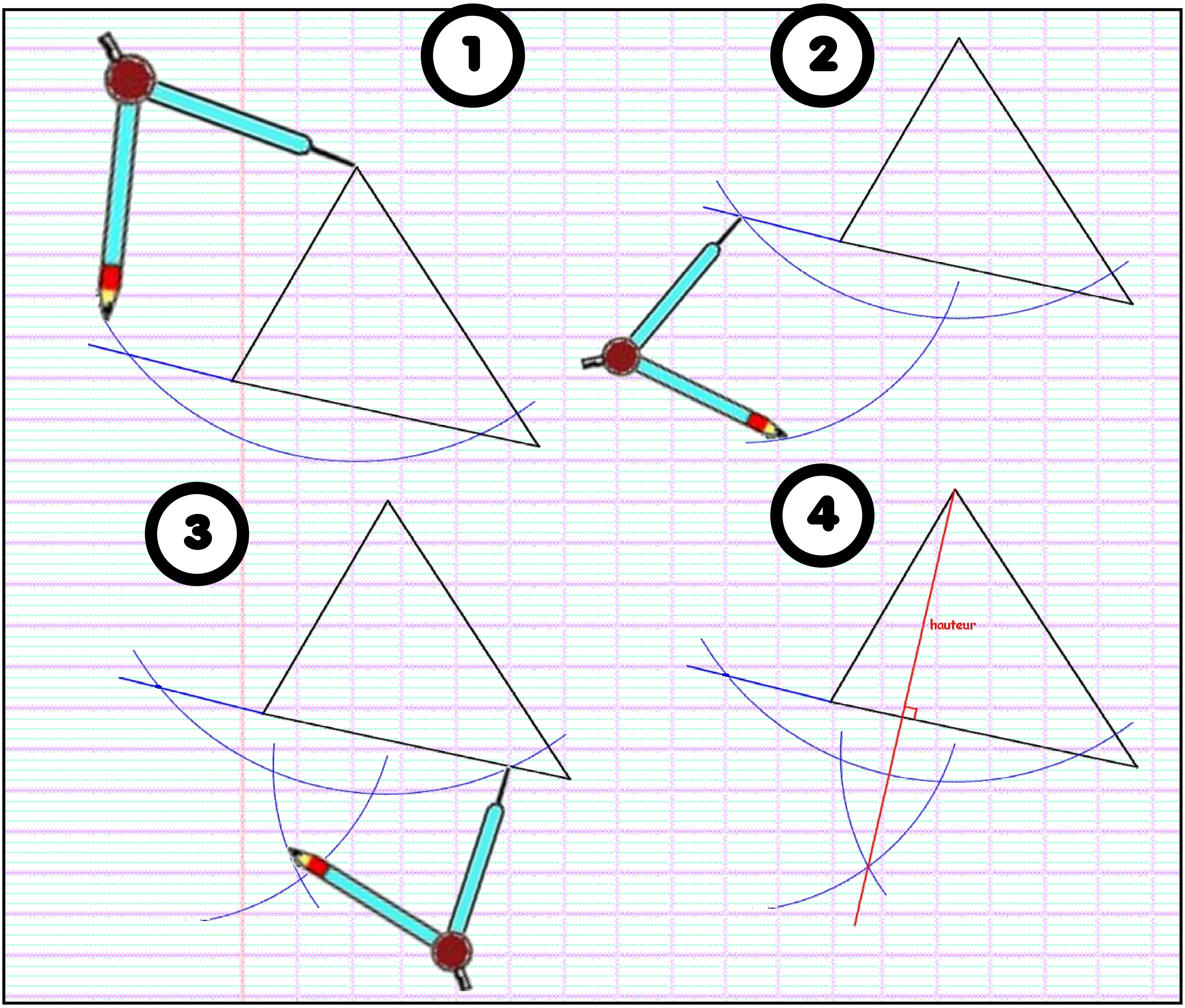
Construction :

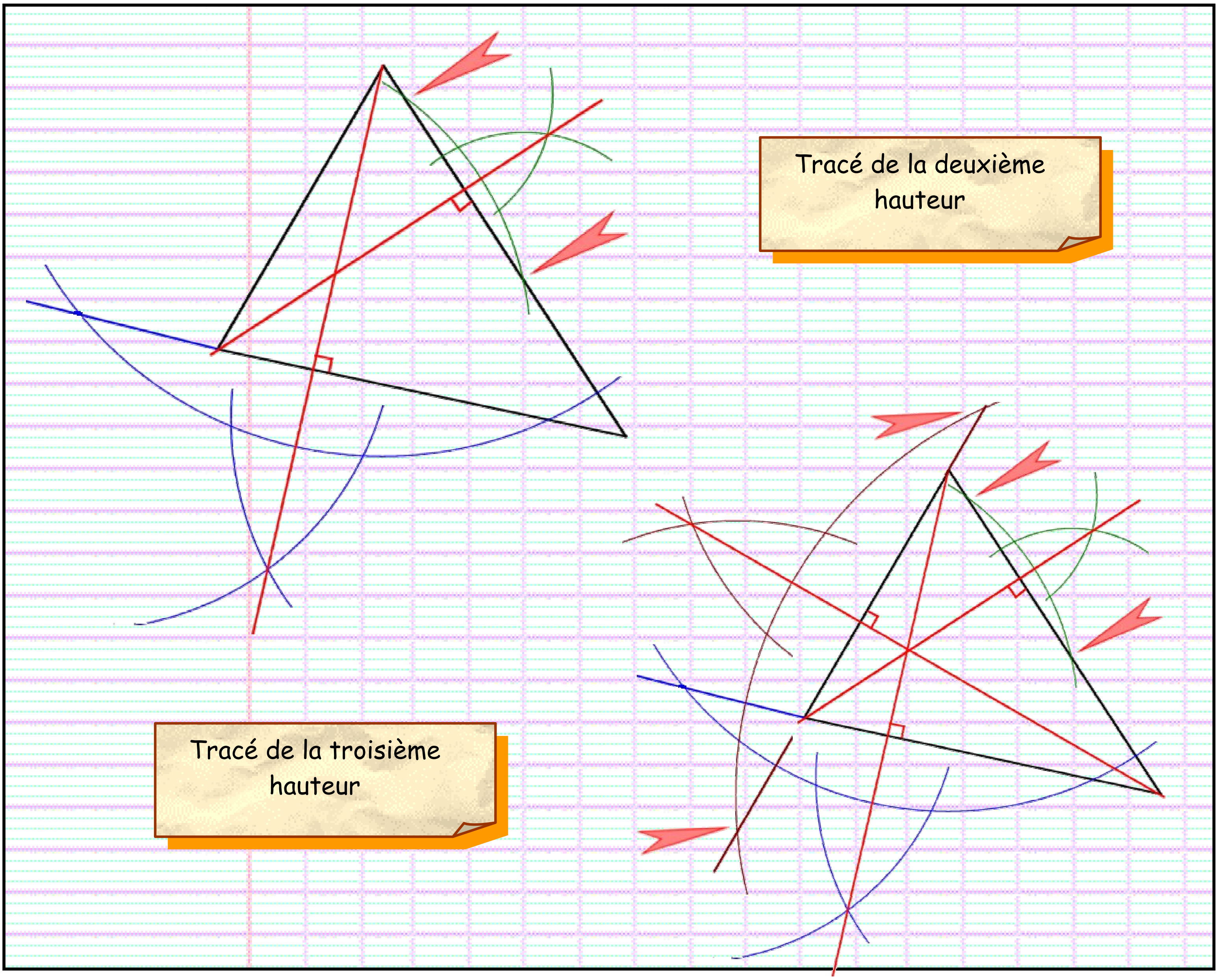
Pour construire dans un triangle ABC la hauteur issue (par exemple) du point A, il suffit de construire la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A. (Cf. ci-dessus la construction d'une droite perpendiculaire)

Seuls le point A et la droite (BC) ont une importance .



Construction des hauteurs d'un triangle. :



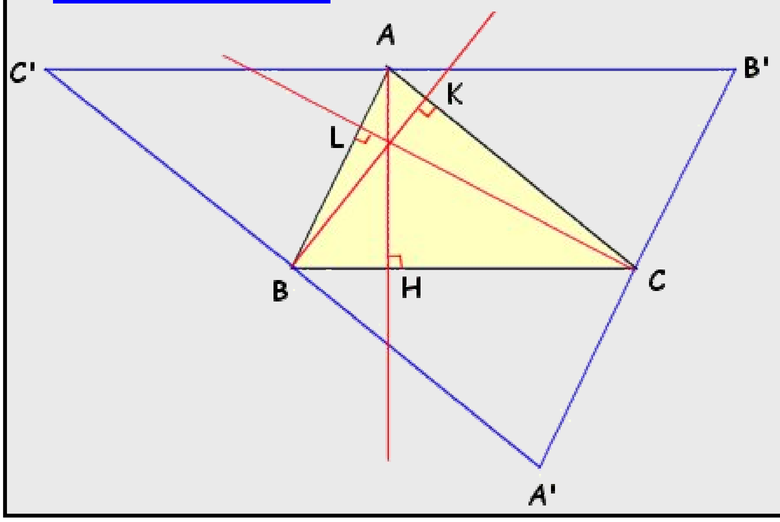


Propriété :

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes ; leur point de concours (point d'intersection) s'appelle « l'orthocentre » .

Orthocentre : nom composé de ortho qui signifie droit et de centre.
Ce dernier mot n'est pas à prendre dans son sens habituel de centre d'un cercle ou centre de symétrie , mais au sens de point de rencontre, point de convergence du langage courant comme dans centre d'attraction , centre commercial.

Démonstration :



Soit ABC un triangle .
Soient H , K et L les pieds des hauteurs issues respectivement de A , B et C .
Par A, menons une parallèle à (BC).
Par B, menons une parallèle à (AC).
Par C, menons une parallèle à (AB).
Ces droites se coupent en A' , B' et C' (cf. dessin)

Montrons que (AH) est la médiatrice de [B'C'] :

▶ (AH) $\perp$ (BC) ((AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC)

(BC) // (B'C') (hypothèse)

donc **(AH) $\perp$ (B'C')**

▶ (BC) // (AB') (car (BC) // (B'C'))

(AB) // (B'C') (car (AB) // (A'B'))

Les côtés opposés du quadrilatère ABCB' sont parallèles

donc ABCB' est un parallélogramme

donc BC = AB'

(BC) // (C'A) (car (BC) // (B'C'))

(AC) // (BC') (car (AC) // (A'C'))

Les côtés opposés du quadrilatère ACBC' sont parallèles

donc ACBC' est un parallélogramme

donc BC = AC'

De ces deux dernières égalités , nous pouvons conclure que AB' = AC' .

Comme les points C' , A et B' sont alignés , **le point A est milieu du segment [B'C']**

▶ La droite (AH) est donc perpendiculaire à [B'C'] (car (AH) $\perp$ (B'C')) et elle passe par A milieu du segment [B'C']

donc (AH) est la médiatrice du segment [B'C']

Montrons que (BK) est la médiatrice de [A'C'] :

Il suffit d'opérer de manière analogue que précédemment.

Montrons que (CL) est la médiatrice de [A'B'] :

Il suffit d'opérer de manière analogue que précédemment.

Conclusion :

Dans le triangle A'B'C' , les droites (AH) , (BK) et (CL) sont les trois médiatrices de ce triangle.
Comme nous savons que les médiatrices d'un triangle sont concourantes, nous pouvons affirmer que ces trois droites (AH) , (BK) et (CL) sont concourantes.
Ces trois droites représentent, pour le triangle ABC , les hauteurs.

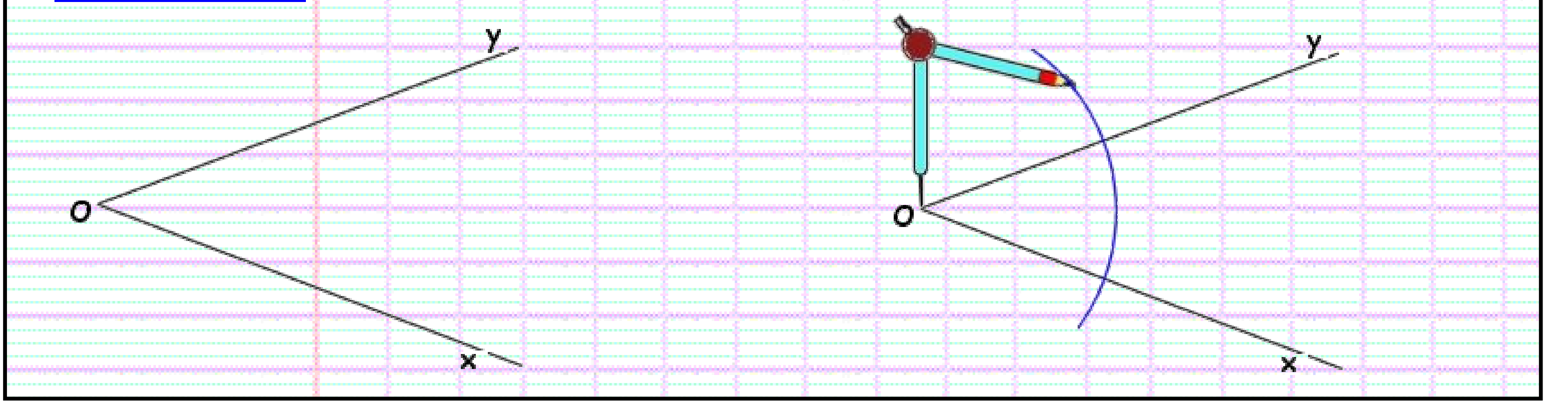
donc les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

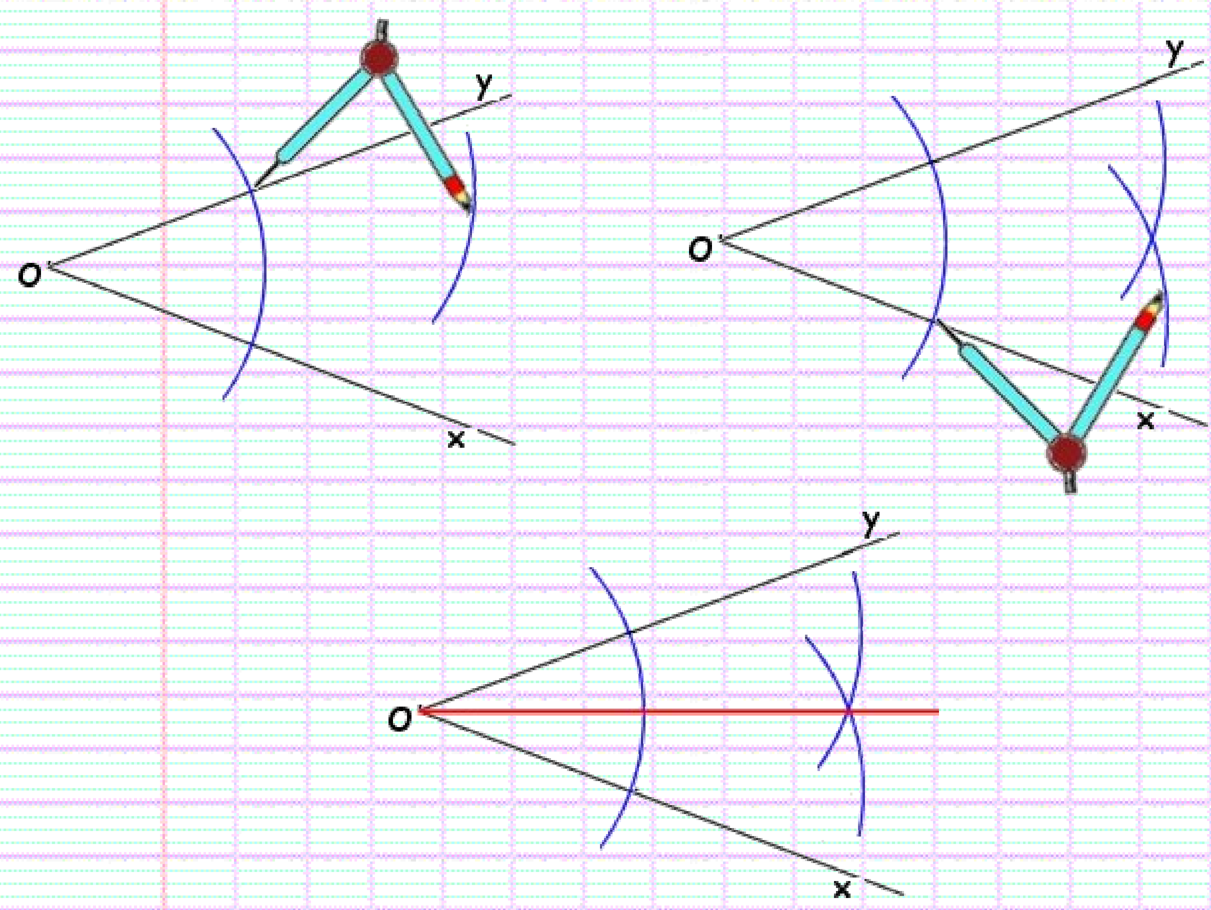
Bissectrices d'un triangle :

Définition :

La bissectrice d'un « angle » est une demi-droite (droite) qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

Construction :

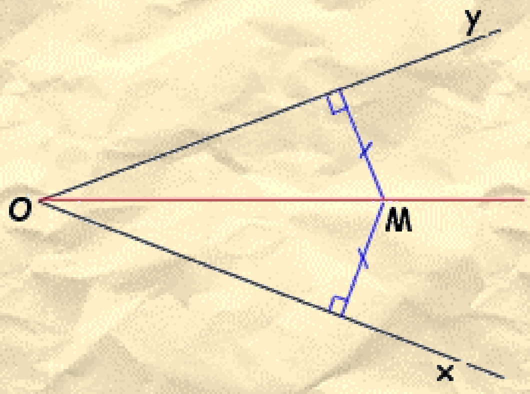




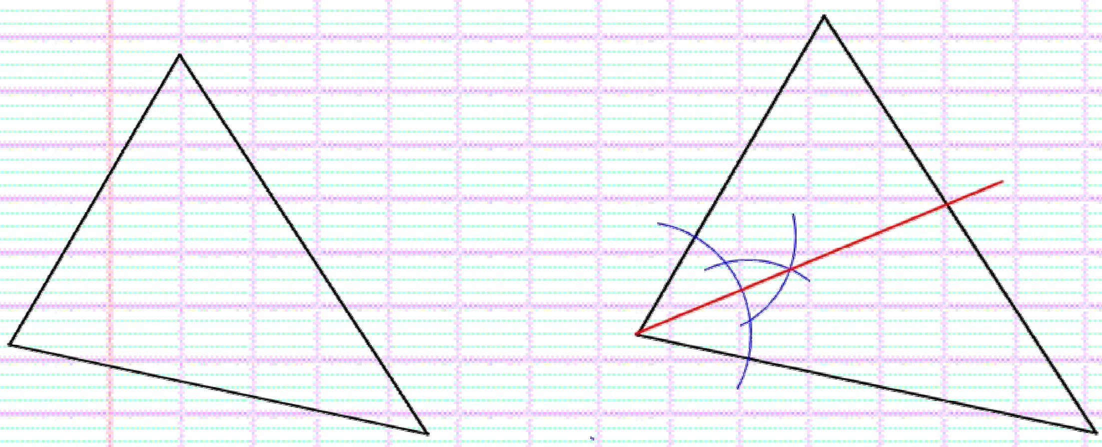
On dispose d'une autre définition de la médiatrice.

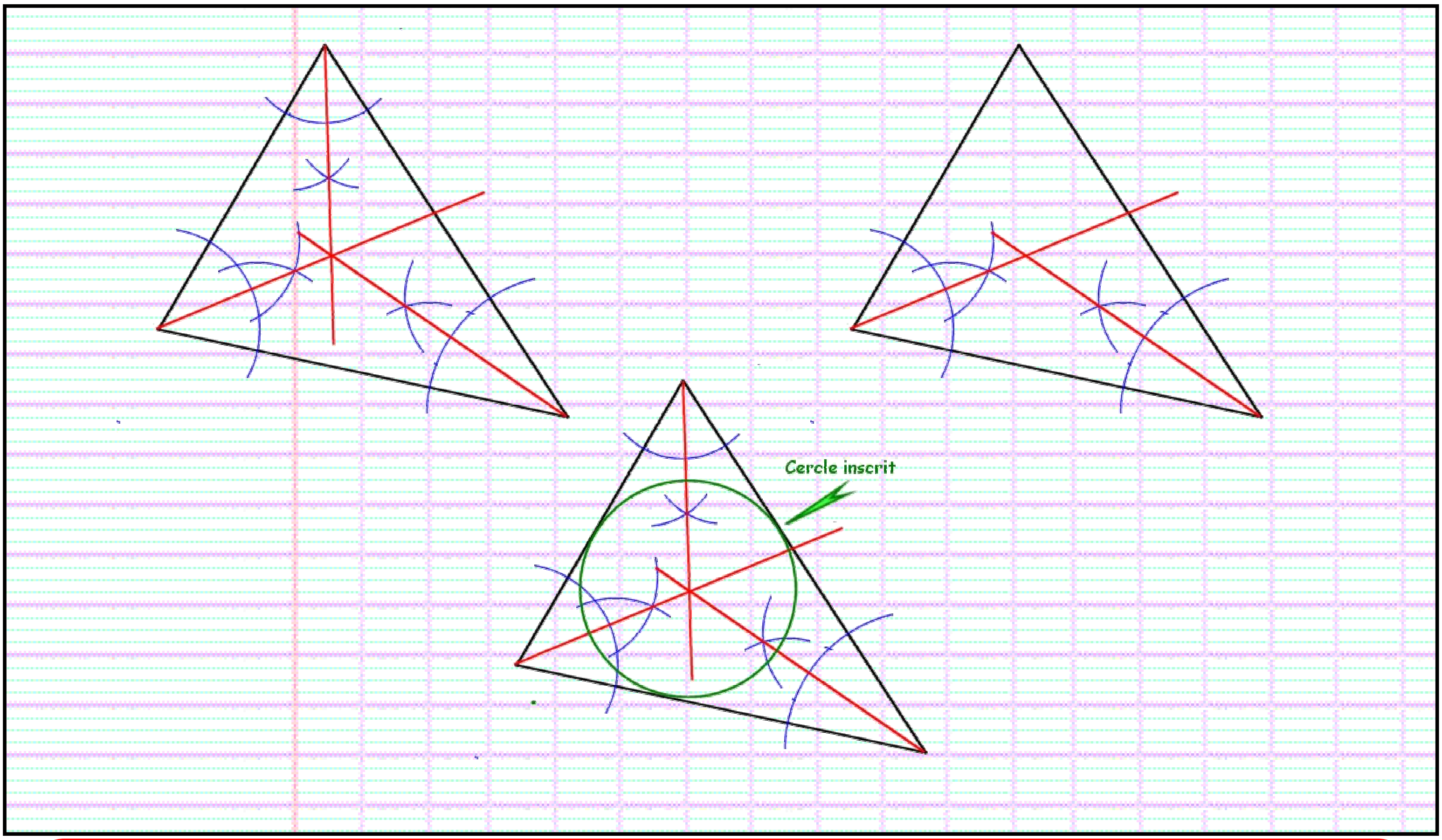
Définition :

La bissectrice d'un « angle » est l'ensemble des points équidistants des deux côtés de « l'angle ».
Cet ensemble de points est une demi-droite.



Construction des bissectrices d'un triangle :

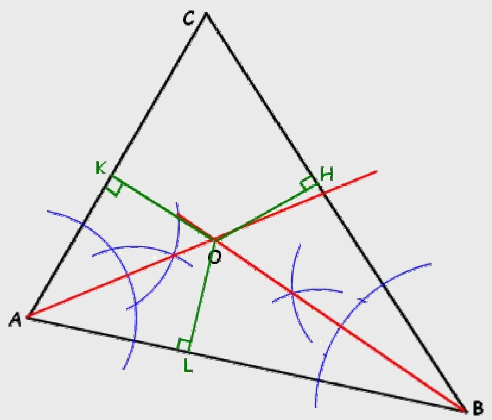




Propriété :

Les bissectrices d'un triangle sont concourantes ; leur point de concours (point d'intersection) s'appelle « <u>le centre du cercle inscrit</u> » .

<u>Démonstration</u>



Soit O le point d'intersection des bissectrices issues de A et de B .
Montrons que le point O est un point de la troisième bissectrice, c'est à dire de la bissectrice issue de C.

O est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$.
donc , d'après la définition ci-dessus , O est équidistant des côtés [AB] et [AC]
c'est à dire <u>OK = OL</u>

O est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.
donc , d'après la définition ci-dessus , O est équidistant des côtés [AB] et [BC]
c'est à dire <u>OL = OH</u>

De ces deux égalités, nous pouvons en conclure que : **OK = OH**

Donc le point O est équidistant des deux côtés [CA] et [CB], donc O est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.
Le point O appartient donc aux trois bissectrices de ce triangle.
Les bissectrices sont donc concourantes et ce point de concours est le centre du cercle de rayon OH (ou OL, ou OK), cercle tangent aux trois côtés du triangle.

Propriété :

Le cercle inscrit est le plus « grand » cercle situé à l'intérieur du triangle.