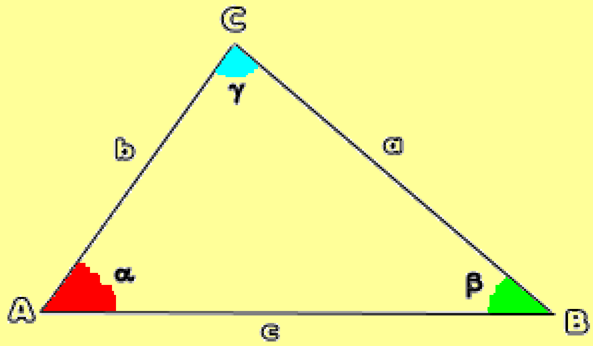
THEME 8

LOI DES SINUS DANS UN TRIANGLE

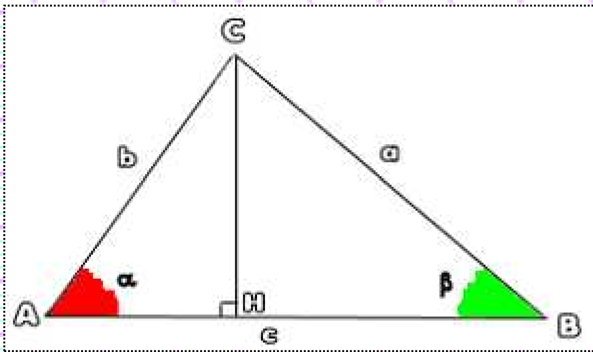
Exercice 1 :

Notations usuelles dans un triangle quelconque.

Dans un triangle nommé ABC ,



- le côté [BC] situé en face du sommet A a une longueur généralement appelée a (lettre minuscule associée à la lettre capitale caractérisant le sommet),
- le côté [AC] situé en face du sommet B a une longueur généralement appelée b,
- le côté [AB] situé en face du sommet C a une longueur généralement appelée c,
- l'angle de sommet A s'appelle souvent α (alpha : lettre grecque),
- l'angle de sommet B s'appelle souvent β (bêta : lettre grecque),
- l'angle de sommet C s'appelle souvent γ (gamma : lettre grecque),



Considérons un triangle ABC dont les cotés [AB], [BC] et [CA] mesurent respectivement c , a et b (voir ci-dessus).
Soit H le pied de la hauteur issue de C.
Nous noterons α l'angle $\widehat{BAC}$, β l'angle $\widehat{ABC}$ et γ l'angle $\widehat{ACB}$ *(les angles seront supposés aigus à notre niveau)*

1. En utilisant le triangle AHC rectangle en H, montrer que :
   CH = b sin α
2. En utilisant le triangle BHC rectangle en H, montrer que :
   CH = a sin β
3. Montrer alors que :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

4. Soit K le pied de la hauteur issue de A. En reprenant la méthode précédente , montrer que :

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

5. Conclure que : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

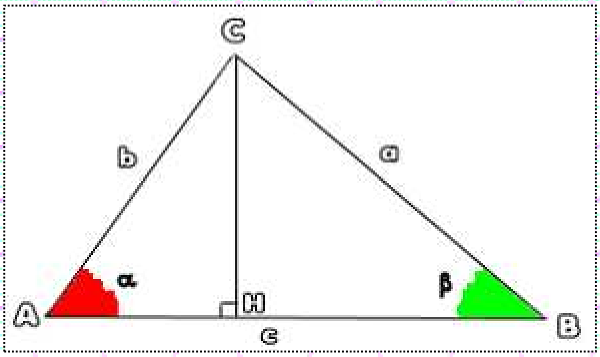
Propriété : Loi des sinus

Dans un triangle , en utilisant les notations usuelles, nous avons :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad \left(\text{ou } \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\right)$$

Exercice 2 :

Nous considérons le triangle précédent et nous conservons les mêmes notations.



1. En utilisant le triangle AHC rectangle en H, montrer que :
CH = b sin α
2. En appelant S l'aire de ce triangle, montrer que :
$$S = \frac{bc\sin\alpha}{2}$$
3. Prouver que $\sin\alpha = \dfrac{2\,S}{bc}$
4. En déduire que $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{abc}{2\,S}$

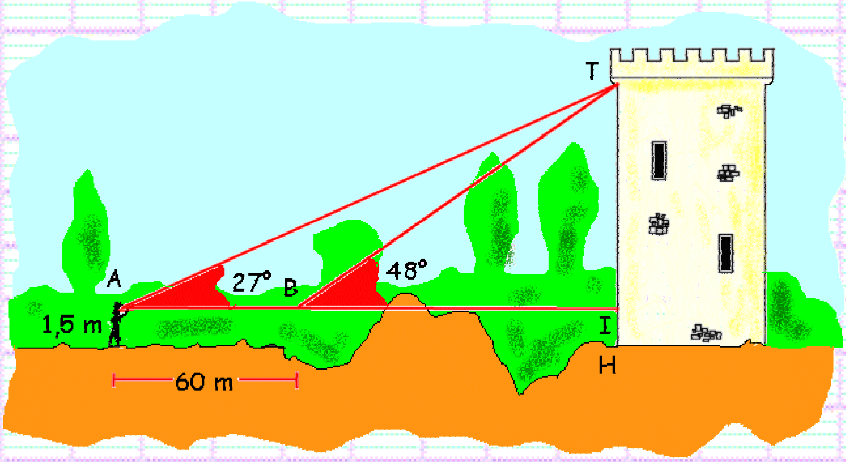
Propriété : Loi des sinus + complément

Dans un triangle , en utilisant les notations usuelles (S aire du triangle) , nous avons :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2\,S}$$

Exercice 3 :

Pour mesurer la hauteur d'une tour, on effectue sur le terrain les mesures indiquées sur la figure suivante :
Calculez cette hauteur à 0,1 m près.



Méthode 1 : (niveau Troisième)

Pour faciliter l'écriture, nous noterons :
TI = x et BI = y
Dans le triangle BIT rectangle en I , nous avons :

$$\tan \widehat{TBI} = \frac{TI}{BI} = \frac{x}{y}$$

soit $\tan 48° = \dfrac{x}{y}$ (1)

Dans le triangle AIT rectangle en I , nous avons :

$$\tan \widehat{TAI} = \frac{TI}{AI} = \frac{x}{y+60}$$

soit $\tan 27° = \dfrac{x}{y+60}$ (2)

Nous sommes en présence de deux équations en x et y. Différentes manières permettent de déterminer les valeurs de x et de y (résolution d'un système, …)
Nous pouvons également procéder comme suit (méthode par comparaison – cf. cours sur les systèmes d'équations)
Exprimons, dans la première équation, y en fonction de x.

$$\tan 48° = \frac{x}{y}$$

$$y \tan 48° = x$$

$$y = \frac{x}{\tan 48} \qquad (1')$$

Exprimons, dans la seconde équation, y en fonction de x.

$$\tan 27° = \frac{x}{y+60}$$

$$(y + 60) \tan 27 = x$$

$$y \tan 27 + 60 \tan 27 = x$$

$$y \tan 27 = x - 60 \tan 27$$

$$y = \frac{x - 60 \tan 27}{\tan 27} \qquad (2')$$

Des deux équations (1') et (2') , nous obtenons :

$$\frac{x}{\tan 48} = \frac{x - 60 \tan 27}{\tan 27}$$

soit $x \tan 27 = (x - 60 \tan 27) \tan 48$

$$x \tan 27 = x \tan 48 - 60 \tan 27 \tan 48$$

$$60 \tan 27 \tan 48 = x \tan 48 - x \tan 27$$

$$60 \tan 27 \tan 48 = x (\tan 48 - \tan 27)$$

$$\frac{60 \tan 27 \tan 48}{\tan 48 - \tan 27} = x \qquad x = \frac{60 \tan 27 \tan 48}{\tan 48 - \tan 27} \approx 56{,}5 \text{ (m)}$$

TI ≈ 56,5 (m) . Il suffit de rajouter 1,5 m pour avoir la hauteur totale de la tour , soit 58,0 m

Autre méthode :

▷ Calcul de l'angle $A\hat{B}T$:

Les deux angles $A\hat{B}T$ et $T\hat{B}I$ sont supplémentaires. Donc

$A\hat{B}T = 180 - T\hat{B}I = 180 - 48 = 132$

▷ Calcul de l'angle $A\hat{T}B$:

Dans le triangle ATB, nous avons :

$$A\hat{T}B = 180 - (T\hat{A}B + A\hat{B}T) = 180 - (27 + 132) = 180 - 159 = 21$$

Appliquons la loi des sinus citée ci-dessus . Nous avons :

$$\frac{AB}{\sin A\hat{T}B} = \frac{AT}{\sin A\hat{B}T} = \frac{BT}{\sin B\hat{A}T}$$

Soit

$$\frac{60}{\sin 21} = \frac{AT}{\sin 132} = \frac{BT}{\sin 27}$$

(le deuxième rapport est, à notre niveau, inconnu. Nous ne l'utiliserons pas.)

▷ Calcul de BT :

Nous avons :

$$\frac{60}{\sin 21} = \frac{BT}{\sin 27} \qquad \text{soit} \qquad \frac{60 \sin 27}{\sin 21} = BT$$

▷ Calcul de TI :

Dans le triangle BIT rectangle en I , nous avons :

$$\sin \widehat{TBI} = \frac{TI}{BT}$$

$$\sin 48 = \frac{TI}{\dfrac{60 \sin 27}{\sin 21}}$$

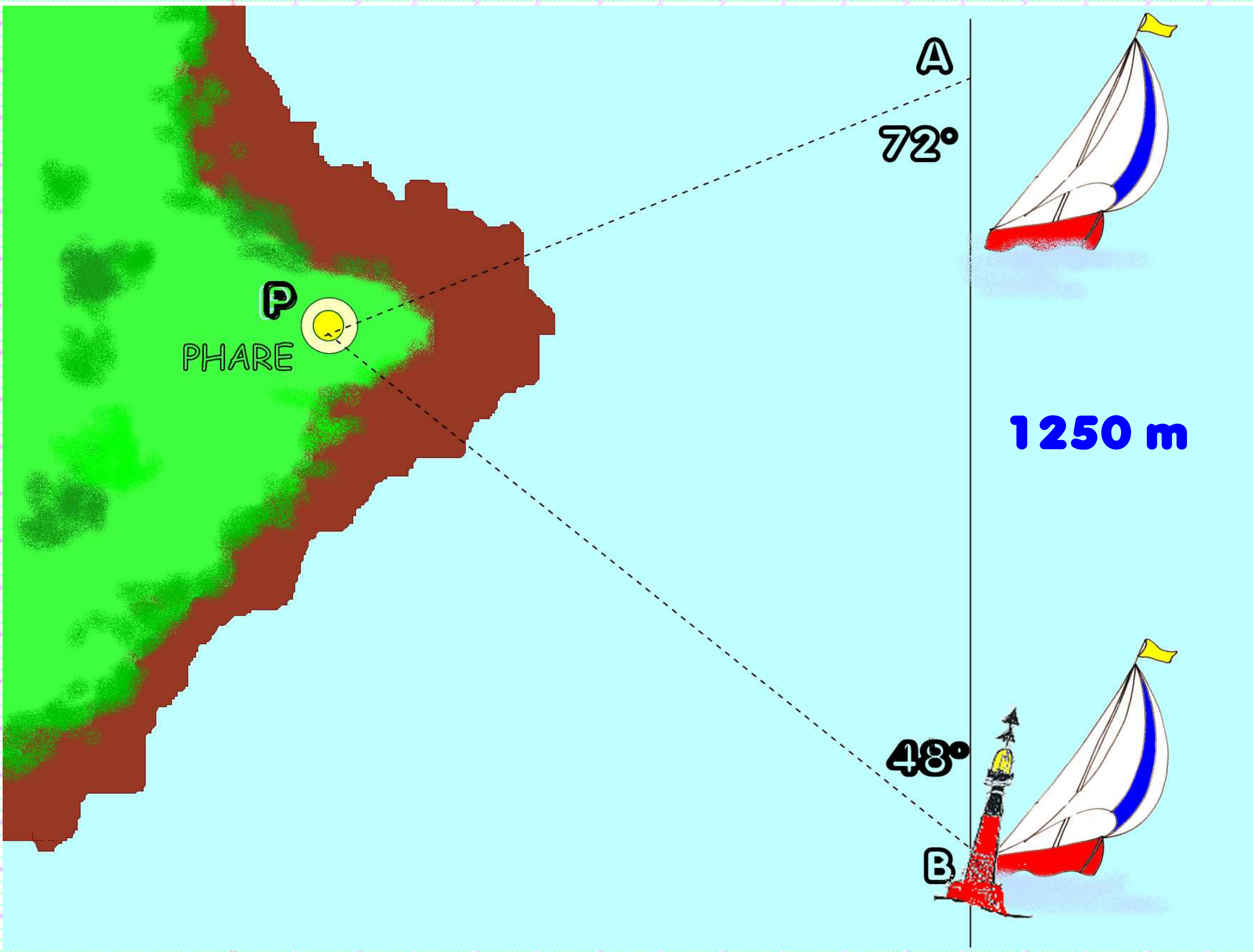
$$\sin 48 \frac{60 \sin 27}{\sin 21} = TI$$

soit enfin $$TI = \frac{60 \sin 48 \sin 27}{\sin 21} \approx 56{,}5 \text{ (m)}$$

TI ≈ 56,5 (m) . Il suffit de rajouter 1,5 m pour avoir la hauteur totale de la tour , soit 58,0 m

Exercice 4 :

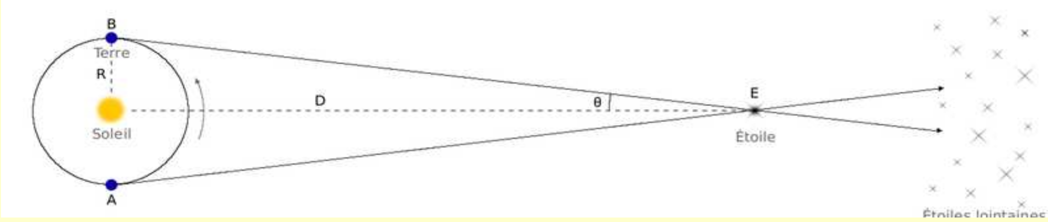
Déterminer la distance qui sépare le phare P et la bouée B à l'aide des indications mentionnées sur le dessin.

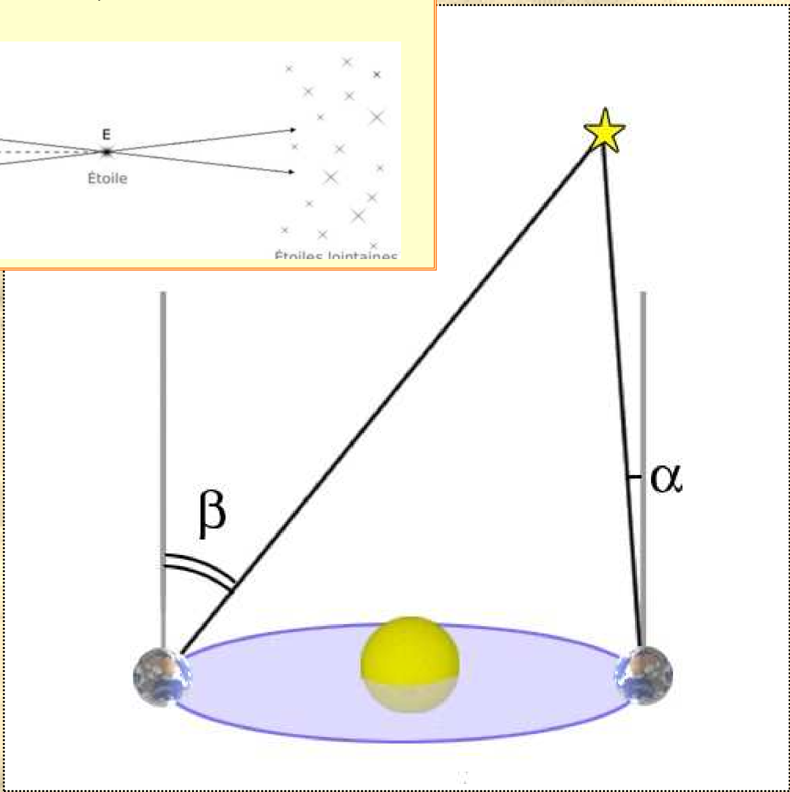


Remarque :

Cette méthode permet d'obtenir la « distance » nous séparant des étoiles les plus proches. Un type de mesures est de déterminer les deux angles α et β . Ces deux angles permettent alors de connaître toutes les données du triangle. La précision des mesures des angles α et β est très importante.

Parallaxe annuelle : L'objet dont on veut mesurer la distance est observé deux fois à six mois d'intervalle. Grâce à la configuration des étoiles en arrière plan, on peut calculer les angles $\hat{ABE}$ et $\hat{BAE}$, puis en déduire la « parallaxe » θ (angle nommé thêta)



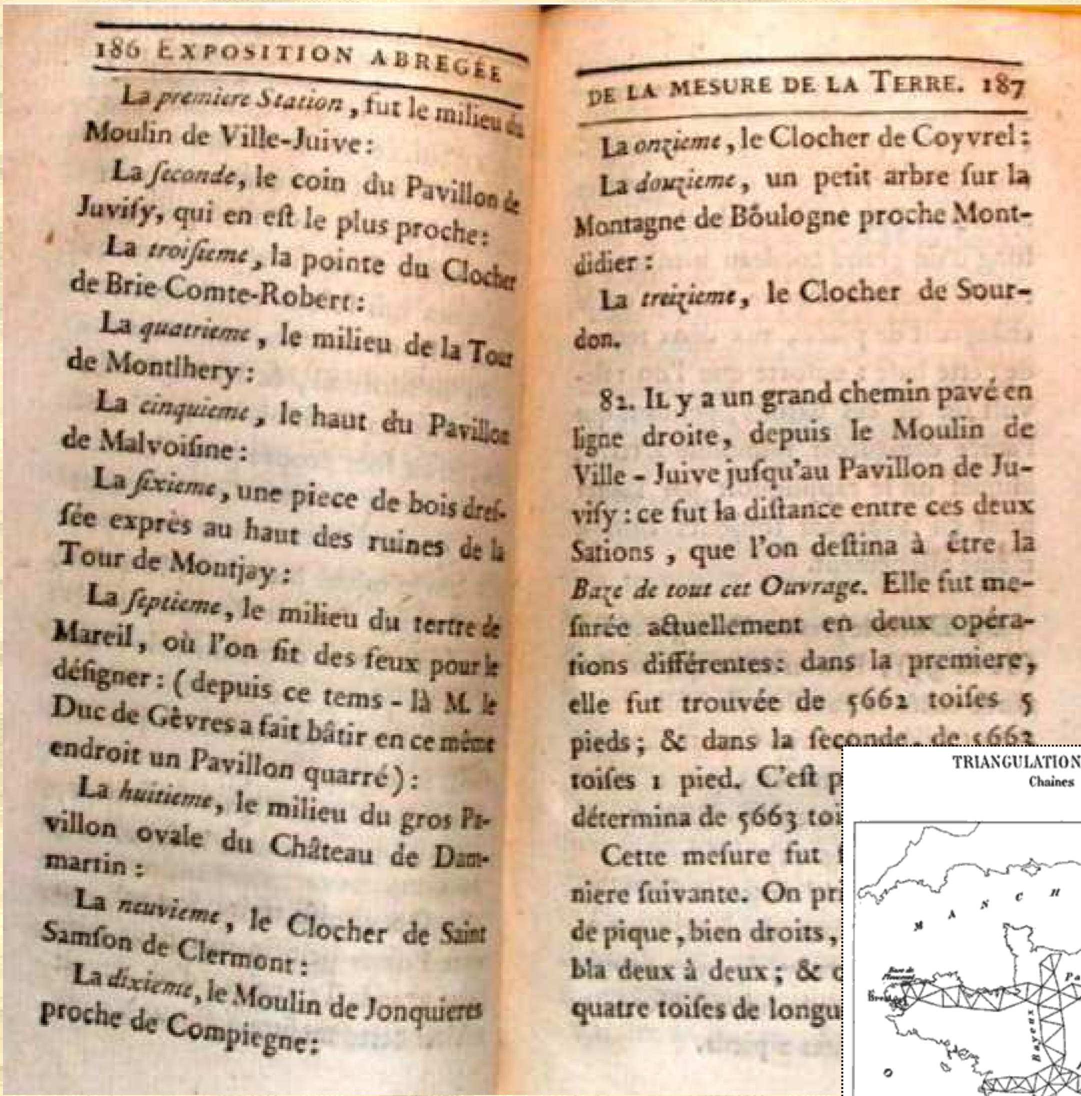


Remarque :

Durant la période 1670 – 1745, à la demande du roi, des scientifiques français (Picard, Cassini père et fils) entreprirent de réaliser des cartes du royaume.

	
LOUIS XIV ROI DE FRANCE 1643 – 1715	LOUIS XV ROI DE FRANCE 1715 – 1774

Pour mesurer les différentes distances, malgré les obstacles pratiquement insurmontables, les scientifiques utilisèrent une triangulation de la France à partir d'objets particuliers (Moulin , clocher, tour , …).



186 EXPOSITION ABREGÉE

La *premiere Station*, fut le milieu du Moulin de Ville-Juive:

La *ſeconde*, le coin du Pavillon de Juviſy, qui en eſt le plus proche:

La *troiſieme*, la pointe du Clocher de Brie-Comte-Robert:

La *quatrieme*, le milieu de la Tour de Montlhery:

La *cinquieme*, le haut du Pavillon de Malvoiſine:

La *ſixieme*, une piece de bois dreſſée exprès au haut des ruines de la Tour de Montjay:

La *ſeptieme*, le milieu du tertre de Mareil, où l'on fit des feux pour le déſigner: (depuis ce tems-là M. le Duc de Gèvres a fait bâtir en ce même endroit un Pavillon quarré):

La *huitieme*, le milieu du gros Pavillon ovale du Château de Dammartin:

La *neuvieme*, le Clocher de Saint Samſon de Clermont:

La *dixieme*, le Moulin de Jonquieres proche de Compiegne:

DE LA MESURE DE LA TERRE. 187

La *onzieme*, le Clocher de Coyvrel:

La *douzieme*, un petit arbre ſur la Montagne de Boulogne proche Mont-didier:

La *treizieme*, le Clocher de Sourdon.

82. Il y a un grand chemin pavé en ligne droite, depuis le Moulin de Ville-Juive juſqu'au Pavillon de Juviſy: ce fut la diſtance entre ces deux Sations, que l'on deſtina à être la *Baze de tout cet Ouvrage*. Elle fut meſurée actuellement en deux opérations différentes: dans la premiere, elle fut trouvée de 5662 toiſes 5 pieds; & dans la ſeconde, de 5663 toiſes 1 pied. C'eſt p… détermina de 5663 toi…

Cette meſure fut … niere ſuivante. On pr… de pique, bien droits, … bla deux à deux; & … quatre toiſes de longu…

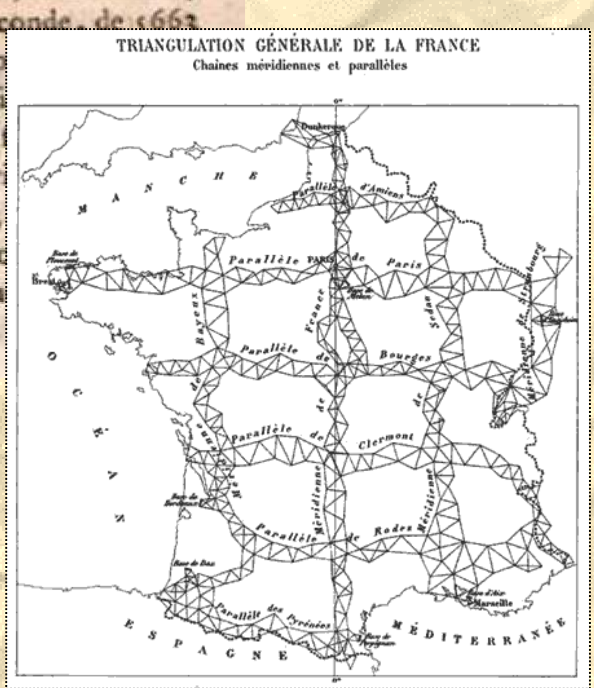
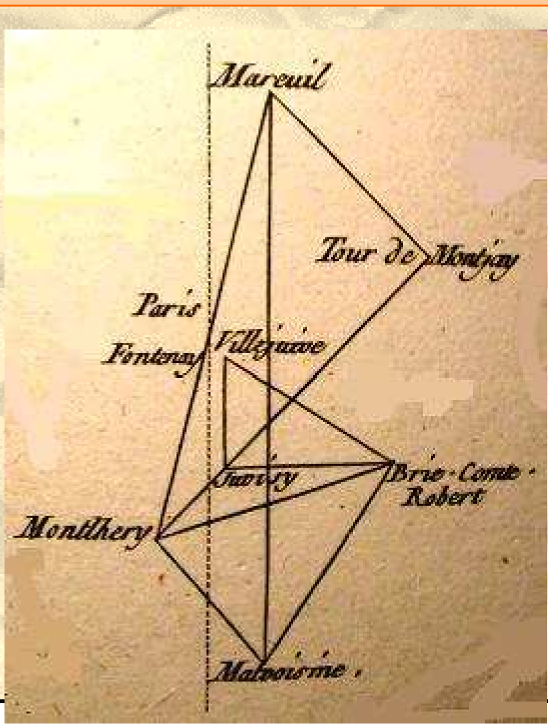
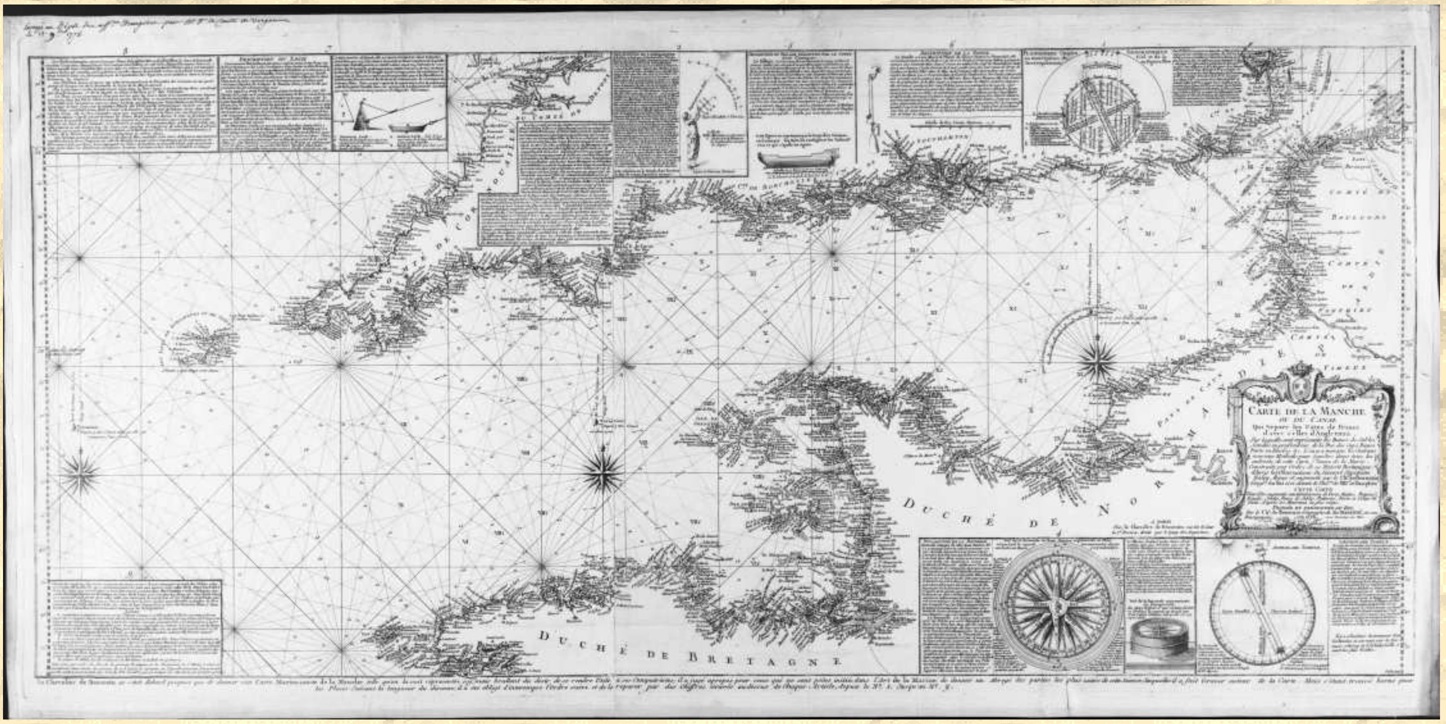
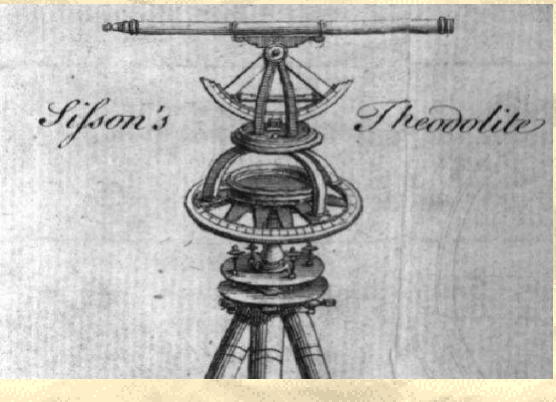


Schéma de la triangulation effectuée par Picard



Jean Picard 1620 - 1682





Les cartes de Cassini peuvent être obtenues à partir du site http://www.cartocassini.org/

Les cartes proviennent du site de la *Bibliothèque Nationale de France* http://www.bnf.fr - *Gallica*

"C'est une chose qui me paraît toujours admirable, qu'on ait découvert de si sublimes vérités avec l'aide d'un quart de cercle et d'un peu d'arithmétique."

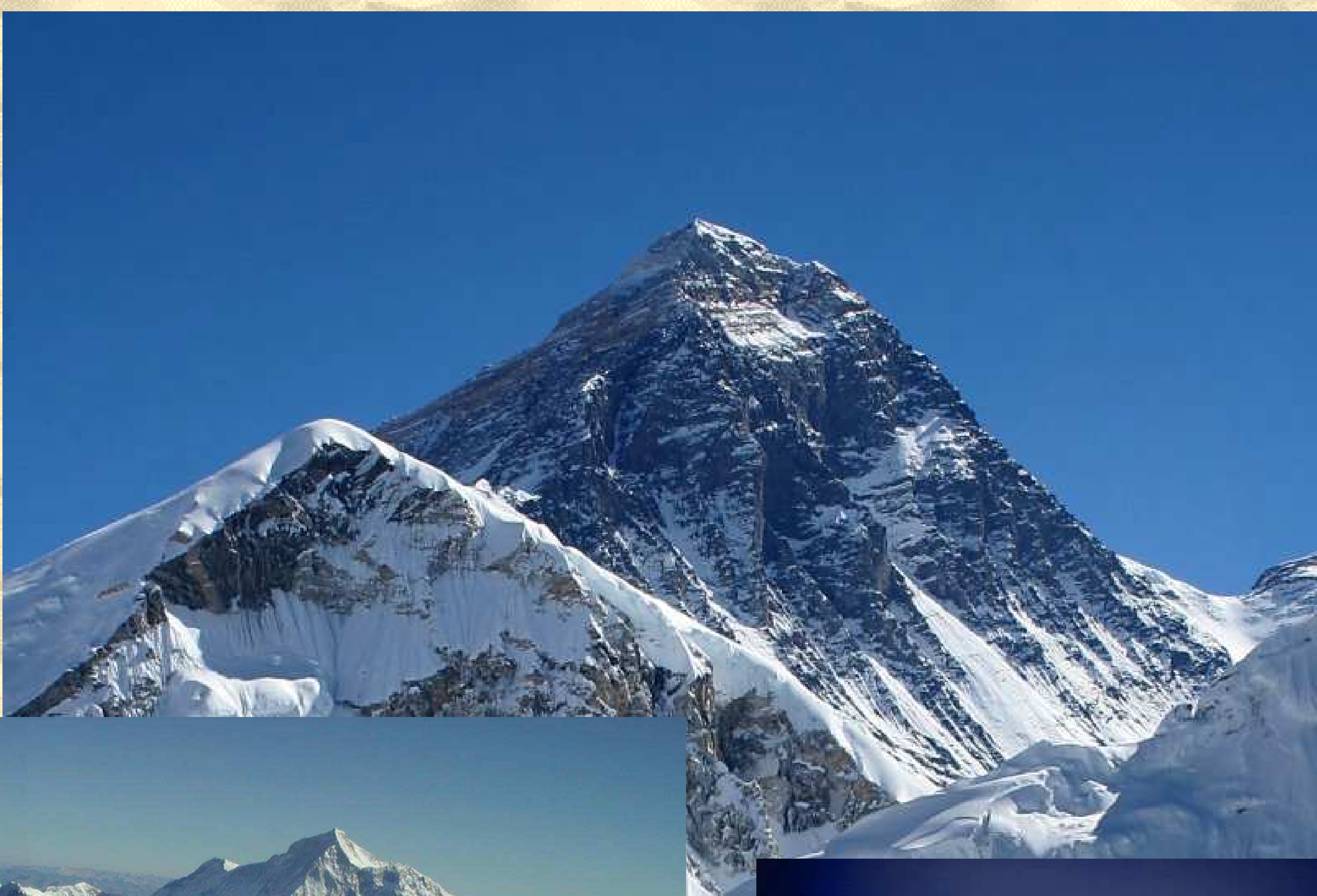
Voltaire (Lettres philosophiques, 1734.)

Remarque :

Au XVIIIème siècle, une triangulation de l'Inde britannique fut entrepris. Les théodolites (appareils servant à mesurer les angles) étaient très grands et pesaient environ une demi-tonne (12 hommes étaient nécessaires pour les transporter).
Les sommets, bien que connus, étaient peu visibles dans la vallée en raison des nuages. Des mesures furent effectuées, parfois sans réelle visibilité et les résultats furent envoyés à une équipe de calculateurs dirigée par Radhanath Sikdar, mathématicien et topographe indien du Bengale. Ses travaux lui permirent d'identifier le plus haut sommet du monde, Peak XV (crête XV).
Le gouverneur général de l'Inde britannique, Andrew Waugh baptisa ce sommet du nom de son prédécesseur Sir George Everest (1790-1866).
Son altitude était alors estimée à 29 002 pieds (soit 8839,20 mètres),

Le ***pied*** *est une unité de longueur d'approximativement 30 centimètres, correspondant à la longueur d'un grand pied humain d'une pointure 45 environ.*
Le pied (en anglais : foot (singulier), feet (pluriel) - symbole: ft) mesure environ 0,3048

Une mesure GPS effectuée en mai 1999 par des alpinistes américains et acceptée par la National Geographic Society porte la hauteur de l'Everest à 8849,87 mètres.
Une mesure effectuée par des scientifiques chinois et publiée en octobre 2005 donne 8844,43 ± 0,21 mètres, c'est à dire 3,7 m de moins par rapport aux mesures effectuées en 1975



Ascension de l'Everest
29 Mai 1953 : Edmund Percival Hillary et le sherpa Norkay Tensing atteignent pour la première fois le sommet de l'Everest
16 Mai 1975 : 1ère victoire féminine par Mme Junko Tabeï (Japon) avec le sherpa Ang Tsering.
8 Mai 1978 : 1ère ascension sans oxygène (par le col sud, versant népalais) de Reinhold Messner et Peter Habeler.
17 Février 1980 : 1ère réussite hivernale (par le col sud) de Leszek Cichy et Krzyszof Wielicki ;
par une température de - 30° à - 60°C, et un vent de 150 km/h.

20 Août 1980 : 1ère ascension en solitaire de Reinhold Messner.

Ascension du Lhotse
18 Mai 1956 : F. Luchsinger et E. Reiss (suisse) atteignent pour la première fois le sommet du Lhotse.

Ascension du Nuptse
16 et 17 Mai 1961 : Dennis Davis (britannique) et le sherpa Tashi atteignent pour la première fois le sommet du Nuptse.

Correction exercice 1 :

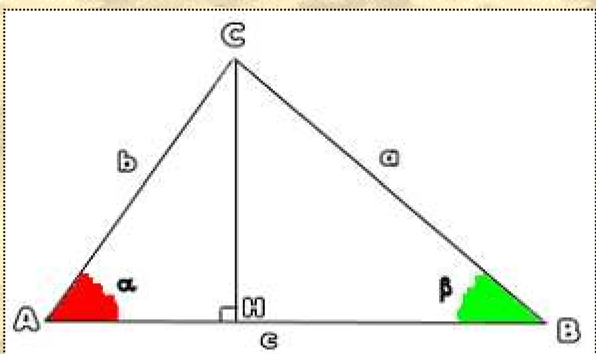
1. Calcul de CH :

Dans le triangle AHC rectangle en H, nous avons :

$$\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC}$$

$$\sin \alpha = \frac{CH}{b}$$

$$b \sin \alpha = CH$$



d'où : $CH = b \sin \alpha$

2. Autre calcul de CH :

Dans le triangle BHC rectangle en H, nous avons :

$$\sin C\hat{B}H = \frac{CH}{BC}$$

$$\sin \beta = \frac{CH}{a}$$

$$a \sin \beta = CH$$

d'où : $CH = a \sin \beta$

3. Première conclusion :

Des deux premières questions, nous avons :

$CH = b \sin \alpha$ et $CH = a \sin \beta$

Donc $a \sin \beta = b \sin \alpha$

Et par suite (« produit en croix »)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

4. Soit K le pied de la hauteur issue de A. En considérant les deux triangles CAK et BAK, nous obtenons, comme précédemment :

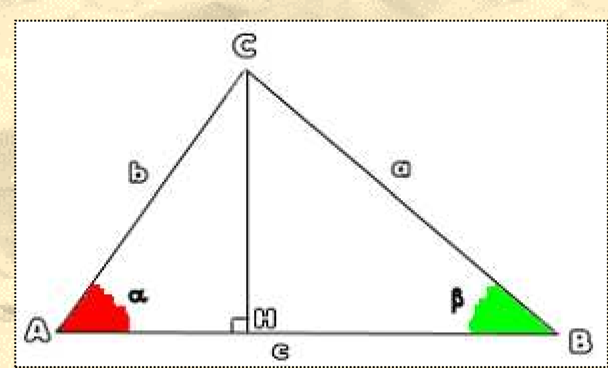
$AK = b \sin \gamma$ et $AK = c \sin \beta$

Et par suite : $$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

5. Conclusion :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \text{ et } \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ donc } \boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$

Correction de l'exercice 2 :



Avec les mêmes notations que dans l'exercice 1

1. Calcul de CH :

Cf. la question 1 de l'exercice précédent .

$CH = b \sin \alpha$

2. Calcul de l'aire S du triangle ABC :

L'aire du triangle ABC est égale à :

$$S = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{c \times b \sin \alpha}{2}$$

Donc : $$S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

3. Calcul de sin α :

Nous avons successivement, à partir de l'égalité précédente :

$$2S = b\,c \sin \alpha$$

$$\frac{2S}{b\,c} = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{2\,S}{bc}$$

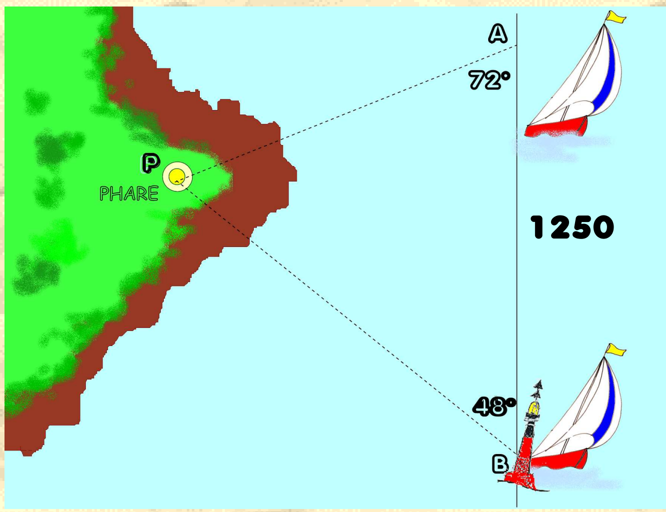
4. Conclusion :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\frac{2S}{b\,c}} = a \times \frac{bc}{2\,S} = \frac{a\,b\,c}{2S} \quad \text{donc} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{abc}{2\,S}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a\,b\,c}{2\,S}}$$

Correction de l'exercice 4 :



Distance entre le phare P et la bouée B :

Dans le triangle PAB , nous avons :

$\hat{P} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (72 + 48) = 60$

Dans le triangle PAB, d'après la loi des sinus, nous avons :

$$\frac{PA}{\sin\hat{B}} = \frac{PB}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{P}}$$

Soit :

$$\frac{PA}{\sin 48} = \frac{PB}{\sin 72} = \frac{AB}{\sin 60}$$

Calcul de PB :

Nous avons :

$$\frac{PB}{\sin 72} = \frac{AB}{\sin 60}$$

Soit $PB = \dfrac{AB \sin 72}{\sin 60} = \dfrac{1250 \sin 72}{\sin 60} \approx 1373 \ \ (\,m\,)$