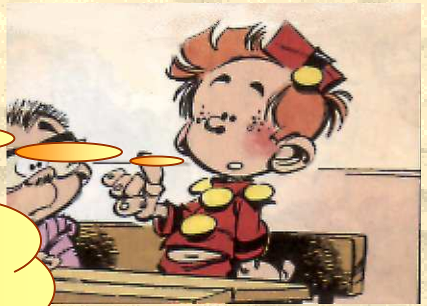
THEME 8

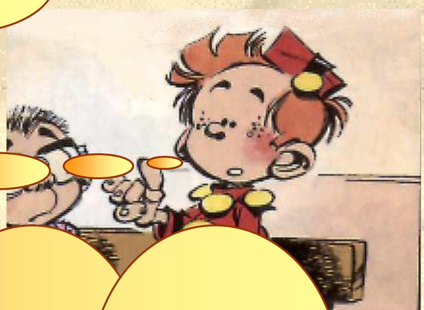
COMMENT SAVOIR SI UN QUOTIENT EST UN DECIMAL ?

Décimal ou non décimal ?



Quelle est la définition d'un nombre décimal ?

12,457 est un nombre décimal.



Donc un nombre décimal est un nombre avec une virgule !

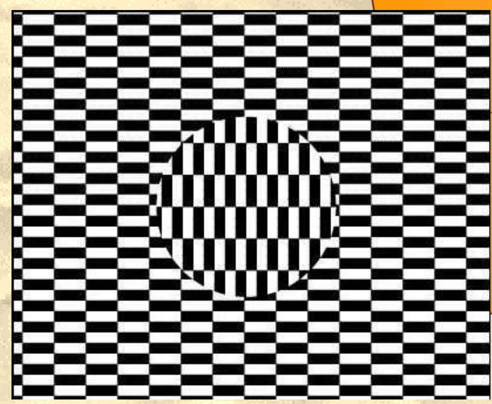
Oui et non !

Par exemple, le nombre 2 est un nombre entier. Mais il peut être également considéré comme nombre décimal (ou décimal). Il est possible de l'écrire 2,0 (ou 2,000).

Maintenant, si nous divisons 1 par 3 , nous obtenons 0,333333333 . Ce résultat est une valeur approchée du quotient demandé (l'affichage de la calculatrice n'est que de 8 , 9 ou 12 chiffres).

En vérité, le résultat contient une infinité de 3. Le nombre de chiffres après la virgule n'étant pas fini, le quotient de 1 par 3 n'est pas un nombre décimal.

Une première définition d'un décimal serait un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de décimales .



Définition :

Un nombre décimal est une « fraction » particulière dont le dénominateur est soit 1 , soit 10, soit 100, soit 1000 , soit … , c'est à dire une puissance de 10. L'écriture de ce nombre sous forme fractionnaire est souvent appelée une fraction décimale.

Exemple :

$2=\dfrac{2}{1}$; $2{,}7=\dfrac{27}{10}$; $3{,}726=\dfrac{3\,726}{1\,000}$; $0{,}45=\dfrac{45}{100}$; $0{,}003=\dfrac{3}{1\,000}$; $-2{,}04=-\dfrac{204}{100}$

Vocabulaire :

Un nombre décimal s'appelle souvent un décimal.
Les décimales sont les chiffres d'un nombre décimal situés après la virgule. Par exemple, dans l'écriture de 2,38 il y a 2 décimales, la première décimale (appelée dixième) est un 3 et la deuxième décimale (appelée centième) est un 8.
Improprement, nous parlerons également de décimales pour un nombre non décimal. Par exemple, nous pouvons dire que, dans le quotient de 1 par 3 , toutes les décimales sont des 3.

Remarque :

$\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. La division ne se termine pas !
Cependant les décimaux ont une importance dans la vie de tous les jours, dans le commerce, dans l'industrie, dans les Sciences Physiques, Il est donc possible de donner une valeur approchée, par exemple au millième. Nous écrirons donc (attention, il n'y a pas de signe d'égalité) :

$$\frac{1}{3}\approx 0{,}333$$

Plus tard, vous pourrez utiliser un autre type d'écriture. Il suffit d'écrire un nombre fini (combien ?) de décimales et de les faire suivre par des points de suspension :

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots\ .$$

Remarque (peu importante au Collège):

Dans l'écriture 12,457 , il est souvent dit que 12 est la partie entière et 457 la partie décimale. La notion de « partie entière » sera étudiée dans les classes supérieures. Si elle est correcte pour le nombre précédent, elle ne l'est plus pour – 12,457. Pour ce nombre , la partie entière n'est pas – 12 , mais – 13 ??? *(si l'on utilise la véritable définition de la partie entière d'un nombre).* La partie entière d'un nombre est l'entier immédiatement inférieur à ce nombre, c'est à dire le plus grand entier inférieur au nombre)

PROBLEME

Il y a deux types de quotients (résultats d'une division). Les quotients peuvent avoir :

- Une écriture finie : ce sont des nombres décimaux.
- Une écriture « infinie » : ce ne sont pas des décimaux.

Peut-on savoir si un quotient (sous forme fractionnaire) est ou n'est pas un décimal ?

Remarque préliminaire :

Comment écrire une puissance de 10 comme produit de facteurs les plus petits possibles (supérieurs à 1 !) ?

Nous avons

$10 = 2 \times 5$

$100 = 10^2 = (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$ ou $100 = 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$1000 = 10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$ ou $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

...

$10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$

➤ Une puissance de dix ne peut se décomposer que comme un produit de facteurs égaux à 2 ou 5. (avec des facteurs les plus petits possibles)

Exemple :

La fraction $\frac{21}{12}$ est-elle une fraction décimale, c'est à dire cette fraction a-t-elle une écriture décimale ?

Simplifions cette fraction. Nous obtenons : $\frac{21}{12} = \frac{3 \times 7}{3 \times 4} = \frac{7}{4}$

Cette fraction est une fraction décimale si elle peut s'écrire avec un dénominateur égal à une puissance de 10.

Peut-on à partir de 4, en multipliant par un nombre, obtenir une puissance de 10.

En utilisant les résultats de la remarque préliminaire, on constate que $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$, c'est à dire que $100 = 4 \times 5 \times 5$, soit encore $100 = 4 \times 25$.

Il suffit donc, dans notre exemple, de multiplier numérateur et dénominateur par 25. Nous obtenons :

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \times 25}{4 \times 25} = \frac{175}{100}$$

Cette fraction $\frac{175}{100}$ est une fraction décimale dont l'écriture décimale est 1,75.

$$\frac{21}{12} = \frac{175}{100} = 1{,}75$$

Remarque :

A la calculatrice, le résultat est effectivement **1,75.**

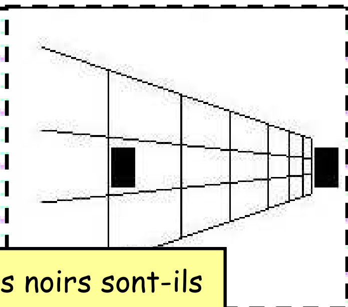
Remarque :

Si le dénominateur, après simplification, d'une fraction est, par exemple **2** (2 x 5 = 10), **4** (4 x 25 = 100) , **5** (5 x 2 = 10) , **8** (8 x 125 = 1000) ,...**20** (20 x 5= 100) , ... alors la fraction est une fraction décimale et admet une écriture décimale. Dans le cas contraire, la fraction n'a pas d'écriture décimale.

Exercices d'application :

Les fractions suivantes sont-elles des nombres décimaux :

$\frac{49}{28}$; $\frac{39}{75}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{18}{36}$; $\frac{52}{65}$; $\frac{9}{27}$



Les rectangles noirs sont-ils de la même grandeur ?