THEME 8 :

NOMBRE PAIR
NOMBRE IMPAIR

▶ Les nombres utilisés dans ce chapitre sont des <u>entiers naturels</u> (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ….)

Définition :
Un nombre pair est un multiple de 2.

Exemples :
0 , 2 , 4 , 16 , 10 248 sont des nombres pairs

Remarque :
Un nombre pair se termine nécessairement par 0 , 2 , 4 , 6 ou 8.
Tous les nombres pairs sont dans la table de multiplication du 2. Le double d'un nombre est toujours pair.

Remarque :
Dire qu'un nombre est un multiple de 2 signifie également que ce nombre est divisible par 2.

Ecriture d'un nombre pair quelconque :
Si nous devons utiliser un nombre pair quelconque dans un démonstration, nous ne pouvons pas nommer ce nombre par une simple lettre a (ou b , ou m , …). Rien ne précise, dans l'écriture, la parité de ce nombre.

6 est un nombre pair car 6 est un multiple de 2, c'est car 6 peut s'écrire 2×3.
24 est un nombre pair. 24 peut s'écrire 2×12.

L'écriture d'un nombre pair est donc $2\,n$

Définition :
Un nombre impair est un nombre qui n'est pas pair.

Etudier la **parité** d'un nombre (entier) c'est déterminer si cet entier est pair ou impair.

Exemples :
1 , 3 , 15 , 247 , 35 769 sont des nombres impairs.

Remarque :
Un nombre impair est un successeur d'un nombre pair.

Ecriture d'un nombre impair quelconque :
Dans la division (euclidienne) par 2 d'un nombre entier, le reste de la division (toujours strictement inférieur au diviseur) ne peut être que 0 ou 1. Si le reste est 0, alors le nombre est divisible par 2 et donc est pair. Si le nombre est impair, son reste est 1.

L'écriture d'un nombre impair (qui est également le successeur d'un nombre pair) est donc $2\,n + 1$

9 est un nombre impair. Une écriture de 9 est $2 \times 4 + 1$
21 est un nombre impair. Une écriture de 21 est $2 \times 10 + 1$

Deux nombres sont dits de même parité s'ils sont :
- Soit tous les deux pairs.
- Soit tous les deux impairs.

Somme de deux nombres :

Exemples :

Somme de deux nombres pairs :
$4 + 8 = 12$ (pair)
Somme de deux nombres impairs :
$3 + 7 = 10$ (pair)
Somme d'un nombre pair et d'un nombre impair :
$6 + 5 = 11$ (impair)
$3 + 2 = 5$ (impair)

Propriété :
La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.
La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.

Cette propriété peut également être présentée sous forme d'un tableau :

	Pair	Impair
Pair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

Parité du premier nombre	Parité du second nombre	Parité de la somme
Pair	Pair	Pair
Pair	Impair	Impair
Impair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

Remarque :
Cette propriété a été constatée sur quelques exemples. Est-elle toujours vérifiée ? Il faut donc une démonstration.

Exercice :
Démontrer la propriété précédente (cas général)

Produit de deux nombres :

Exemples :

Produit de deux nombres pairs :
$2 \times 4 = 8$ (pair)
Produit de deux nombres impairs :
$3 \times 5 = 15$ (impair)

Produit d'un nombre pair et d'un nombre impair :

$6 \times 5 = 30$ (pair)

$3 \times 2 = 6$ (pair)

Propriété :

Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.
Dans tous les autres cas, le produit est pair.

Cette propriété peut également être présentée sous forme d'un tableau :

	Pair	Impair
Pair	Pair	Pair
Impair	Pair	Impair

Parité du premier nombre	Parité du second nombre	Parité du produit
Pair	Pair	Pair
Pair	Impair	Pair
Impair	Pair	Pair
Impair	Impair	Impair

Exercice :

Démontrer la propriété précédente (cas général)

Carré d'un nombre :

Exemples :

Carré d'un nombre pair :

$4^2 = 16$ (pair)

Carré d'un nombre impair :

$3^2 = 9$ (impair)

Propriété :

Un nombre élevé au carré conserve sa parité.

Exercice :

Démontrer la propriété précédente (cas général)

Cas général :

Propriété :

Un nombre élevé à une puissance conserve sa parité.

Nombres consécutifs :

Des nombres consécutifs sont des nombres qui se suivent. Leur différence est égale à 1.
Si nous appelons le premier n , le second s'écrit n + 1 (ou si nous écrivons n le second, le premier s'écrit n – 1)

Propriété :

La somme de deux nombres consécutifs est impaire.
Le produit de deux nombres consécutifs est pair.

Exercice :

Démontrer la propriété précédente (cas général)

PETIT PROBLEME

Problème de N. Chuquet (Maths sans frontières)
Margot a un nombre pair de pièces dans une main et un nombre impair de pièces dans l'autre main.
Afin de deviner dans quelle main se trouve le nombre pair de pièces, Nicolas Chuquet lui dit :
« Multiplie le nombre de pièces de ta main droite par deux, ajoute-le au nombre de pièces de ta main gauche et donne-moi le résultat. »

Exercice :

Démontrer que selon la réponse, Nicolas Chuquet peut déterminer la parité du nombre de pièces contenues dans chaque main.

AUTRE EXERCICE

Soit n un nombre entier.
a) Calculer $(n + 1)^2 - n^2$
b) Quelle est la parité du résultat obtenu (Ce résultat est-il pair ou impair) ? En déduire que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs.
c) Ecrire 5 , 13 et 21 sous forme d'une différence de carrés de deux entiers naturels consécutifs.
d) Calculer la somme :
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 2 005 + 2 007 + 2 009.

SOLUTIONS

Propriété :

La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.
La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.

▶ Somme de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est 2n et le second 2p. (Un nombre impair est du type 2 x ☐)

Nous avons :

$$2n + 2p = 2(n + p)$$

Ce résultat est de la forme 2 x ☐ , (multiple de 2) , donc la somme est paire.

▶ Somme de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est 2n + 1 et le second 2p + 1. (Un nombre impair est du type 2 x ☐ + 1)

Nous avons :

$$(2n + 1) + (2p + 1) = 2n + 1 + 2p + 1 = 2n + 2p + 2 = 2(n + p + 1)$$

Ce résultat est de la forme 2 x ☐ , (multiple de 2) , donc la somme est paire.

▶ Somme d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair 2n et un nombre impair 2p + 1

Nous avons :

$$2n + (2p + 1) = 2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1$$

Ce résultat est de la forme 2 x ☐ + 1, donc la somme est impaire.

Le résultat est similaire si le premier nombre est impair et le second pair.

Propriété :

Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.
Dans tous les autres cas, le produit est pair.

▶ Produit de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est 2n et le second 2p. (Un nombre impair est du type 2 x ☐)

Nous avons : (le symbole x est ici le signe de multiplication)

$$2n \times 2p = 2 \times n \times 2 \times p = 2 \times (n \times 2 \times p)$$

Ce résultat est de la forme 2 x ☐ , (multiple de 2) , donc le produit est pair.

▶ Produit de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est 2n + 1 et le second 2p + 1. (Un nombre impair est du type 2 x ☐ + 1)

Nous avons : (le symbole x est ici le signe de multiplication)

$$(2n + 1) \times (2p + 1) = 4np + 2n + 2p + 1 = 2(2np + n + p) + 1$$

Ce résultat est de la forme 2 x ☐ + 1 , donc le produit est impair.

▶ Produit d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair $2n$ et un nombre impair $2p + 1$
Nous avons : (le symbole x est ici le signe de multiplication)

$$2n \times (2p + 1) = 4np + 2n = 2(2np + n)$$

Ce résultat est de la forme $2 \times \square$, (multiple de 2) , donc le produit est pair.

Propriété :
Un nombre élevé au carré conserve sa parité.

▶ Carré d'un nombre pair :
Considérons un nombre pair. Ce nombre peut s'écrire $2n$
Nous avons :

$$(2n)^2 = 2^2 \times n^2 = 4 n^2 = 2 \times (2 n^2)$$

Ce résultat est de la forme $2 \times \square$, (multiple de 2) , donc le carré reste pair.

▶ Carré d'un nombre impair :
Considérons un nombre impair. Ce nombre peut s'écrire $2n + 1$
Nous avons :

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2 (2n^2 + 2n) + 1$$

Ce résultat est de la forme $2 \times \square + 1$, donc le carré reste impair.

Propriété :
La somme de deux nombres consécutifs est impaire.
Le produit de deux nombres consécutifs est pair.

Considérons deux nombres consécutifs. En appelant k le premier, le second s'écrit $k + 1$ (leur parité est, pour l'instant, sans importance)
Notons que parmi les deux nombres consécutifs, un est pair et l'autre est impair.

▶ Somme de deux nombres consécutifs :
Nous avons :

$$k + (k + 1) = k + k + 1 = 2k + 1$$

Ce résultat est de la forme $2 \times \square + 1$, donc cette somme est impaire.

Remarque :
Comme un des deux nombres est pair et l'autre impair, en utilisant la propriété ci-dessus concernant la parité de la somme de deux nombres, nous pouvons affirmer rapidement que le résultat était impair

▶ Produit de deux nombres consécutifs :
Nous savons que le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair. Donc le produit de deux nombres consécutifs est impair.

Problème de N. Chuquet

Margot a un nombre pair de pièces dans une main et un nombre impair de pièces dans l'autre main.
Afin de deviner dans quelle main se trouve le nombre pair de pièces, Nicolas Chuquet lui dit :
« Multiplie le nombre de pièces de ta main droite par deux, ajoute-le au nombre de pièces de ta main gauche et donne-moi le résultat. »

Quel que soit la parité du nombre de pièces contenues dans la main droite, en multipliant ce nombre par 2, nous obtenons un nombre pair.
A ce nombre pair, nous devons ajouter le nombre de pièces de la main gauche.
Si le nombre de pièces de la main gauche est pair, étant donné que la somme de deux nombres pairs est paire, le résultat final sera un nombre pair.
Si le nombre de pièces de la main gauche est impair, étant donné que la somme de d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire, le résultat final sera un nombre impair.
Donc le résultat final aura la même parité que celle du nombre de pièces de la main gauche.

▶ Résultat donné pair : Nombre de pièces de la main gauche : pair
et par suite
Nombre de pièces de la main droite : impair

▶ Résultat donné impair : Nombre de pièces de la main gauche : impair
et par suite
Nombre de pièces de la main droite : pair

AUTRE EXERCICE

Soit n un nombre entier.

a) Calcul de $(n+1)^2 - n^2$:

Nous avons :

$$(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Nous pouvions, au lieu de développer, factoriser cette expression (différence de deux carrés) (le symbole x est ici le signe de multiplication)

$$(n+1)^2 - n^2 = [(n+1)+n][(n+1)-n] = [n+1+n][n+1-n] = (2n+1) \times 1 = 2n+1$$

b) Parité du résultat obtenu :

Ce résultat est de la forme $2 \times \square + 1$, donc $(n+1)^2 - n^2$ est un nombre impair.

Ecriture d'un nombre impair comme différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs :

Tout nombre impair k s'écrit sous la forme 2n + 1 avec $n = \dfrac{k-1}{2}$

En utilisant le résultat précédent, le nombre impair k s'écrit comme différence de deux carrés consécutifs :

$$k = (n+1)^2 - n^2 = \left(\frac{k-1}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$$

$$k = \left(\frac{k-1}{2} + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k-1+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$$

Remarquons que $\dfrac{k+1}{2}$ et $\dfrac{k-1}{2}$ sont des entiers (k étant impair , k + 1 est pair et est donc divisible par 2 . De plus, ces deux entiers sont consécutifs puisque la différence est égale à 1)

c) Ecriture de 5 , 13 et 21 sous forme d'une différence de carrés de deux entiers naturels consécutifs.

▶ 5 est un nombre impair. Il s'écrit (le symbole x est ici le signe de multiplication)

$5 = 2 \times 2 + 1$, c'est-à-dire sous la forme 2 n + 1 avec n = 2

D'après ce qui précède, 5 est donc la différence des carrés des deux nombres consécutifs n + 1 et n , c'est-à-dire :

$5 = (2+1)^2 - 2^2 = 3^2 - 2^2$ (Vérification : $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$)

▶ 13 est un nombre impair. Il s'écrit (le symbole x est ici le signe de multiplication)

$13 = 2 \times 6 + 1$

Donc 13 est donc la différence des carrés des deux nombres consécutifs 6 + 1 et 6.

$13 = (6+1)^2 - 6^2 = 7^2 - 6^2$ (Vérification : $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$)

▶ 21 est un nombre impair. Il s'écrit (le symbole x est ici le signe de multiplication)

$21 = 2 \times 10 + 1$

Donc 21 est donc la différence des carrés des deux nombres consécutifs 10 + 1 et 10.

$21 = (10+1)^2 - 10^2 = 11^2 - 10^2$ (Vérification : $11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$)

<u>d) Calcul de $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 2\,005 + 2\,007 + 2\,009$:</u>

Nous avons :

$1 = 1^2 - 0^2$

$3 = 2^2 - 1^2$

$5 = 3^2 - 2^2$

$7 = 4^2 - 3^2$

….

$2005 = 1003^2 - 1002^2$ (car $2005 = 2 \times 1002 + 1$)

$2007 = 1004^2 - 1003^2$ (car $2007 = 2 \times 1003 + 1$)

$2009 = 1005^2 - 1004^2$ (car $2005 = 2 \times 1004 + 1$)

La somme demandée est donc égale à :

$\mathbf{S} = (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \ldots\ldots$

$+ (1003^2 - 1002^2) + (1004^2 - 1003^2) + (1005^2 - 1004^2)$

En supprimant les parenthèses, nous obtenons :

$\mathbf{S} = 1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 + \ldots\ldots + 1003^2 - 1002^2 + 1004^2 - 1003^2 + 1005^2 - 1004^2$

Nous nous apercevons que les termes 1^2 , 2^2 , 3^2 jusqu'à 1004^2 s'éliminent deux par deux.

Nous obtenons alors :

$\mathbf{S} = -0^2 + 1005^2 = 1005^2 = 1\,010\,025$

Remarque :

L'élimination de tous les termes 1^2 , 2^2 , 3^2 jusqu'à 1004^2 est correcte, mais , dans les prochaines années, la démonstration de ce fait sera plus rigoureuse.