THEME :

NOMBRES PREMIERS
PREMIERES NOTIONS

PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES, DES SVT, DE PHYSIQUE-CHIMIE DU COLLÈGE
Le B.O. N°6 19 AVRIL 2007 HORS-SÉRIE

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités, commentaires	Commentaires spécifiques pour le socle
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle.			
		Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers ou obtenus à partir des critères de divisibilité vus en classe de sixième est possible dans des cas simples, mais ne doit pas être systématisé. A ce propos, la notion de nombre premier est introduite sans donner lieu à un développement particulier ni à des exercices systématiques de décomposition en facteurs premiers (notions étudiées en classe de seconde).	
2.2. Calculs élémentaires sur les			

▶ Dans ce chapitre, tous les nombres utilisés sont des entiers naturels (non nuls)

NOMBRES PREMIERS

Définition :

Un nombre premier est un nombre entier naturel qui possède exactement deux diviseurs.

Remarques :

Un nombre admet toujours 1 comme diviseur.
Un nombre admet toujours comme diviseur lui-même.
Un nombre (supérieur à 1) est premier s'il n'admet comme diviseurs que 1 et lui-même. (Comme il est supérieur à 1 , ces deux diviseurs seront bien distincts).
1 n'est pas un nombre premier. L'entier 1 ne possède qu'un seul diviseur 1.

Exemples :

▶ 2 est un nombre premier. Ses diviseurs sont 1 et 2. C'est d'ailleurs le seul nombre pair premier. Un nombre pair (supérieur à 2) a comme diviseurs 1 , lui-même et … 2 (qui est différent du nombre)
Par exemple 6 n'est pas premier. Ce nombre a 4 diviseurs (1 ; 2 ; 3 et 6)

Excepté 2, tous les nombres premiers sont impairs.

▶ 3 est un nombre premier. Il n'a comme diviseur que 1 et 3.
▶ 5, 7 sont des nombres premiers.
▶ 9 n'est pas un nombre premier. 3 est un diviseur de 9.

Euclide (vers -300 av. J.-C.), donne, dans les *« Éléments »* , la définition des nombres premiers, la preuve de leur infinité, la définition du plus grand commun diviseur (PGCD) et du plus petit commun multiple (PPCM), et les algorithmes pour les déterminer, aujourd'hui appelés algorithmes d'Euclide.

Remarques :

Il existe une infinité de nombres premiers (Euclide) et ils sont répartis de manière irrégulière dans l'ensemble des nombres. Aucune formule ne permet de les déterminer.
Par opposition, un nombre produit de deux nombres entiers (différents de 1) est dit composé.
Par exemple 8 est composé (8 = 2 × 4).
1 n'est ni premier ni composé.

Remarques :

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Recherche des nombres premiers inférieurs à 100 :

Le crible d'Ératosthène est un procédé qui permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre donné.

Dans un tableau 10 x 10, inscrivons tous les nombres inférieurs à 100.
▶ 1 est à supprimer (1 n'est pas un nombre premier)
▶ 2 est un nombre premier.
Tous les nombres (supérieurs à 2) multiples de 2 (c'est-à-dire pairs) ne sont pas premiers (ils sont divisibles par 2). Supprimons-les dans le tableau suivant :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

▶ 3 est un nombre premier. Tous les multiples de 3 (supérieurs à 3) ne sont pas premiers. Ils ont comme diviseurs 1, eux-mêmes et 3. Remarquez, que dans ce tableau, les multiples de3 sont répartis en diagonale.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

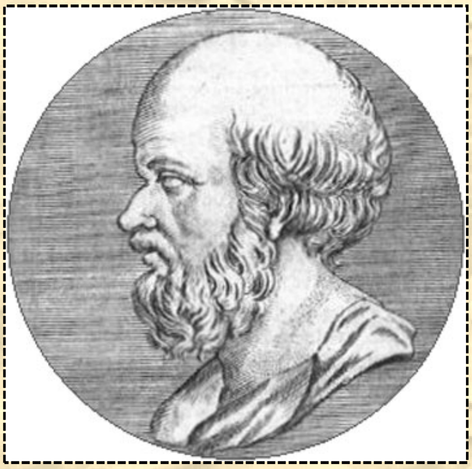
▶ Supprimons maintenant les multiples de 4. Ces nombres sont déjà supprimés. Un multiple de 4 est tout d'abord un multiple de 2.

▶ 5 est un nombre premier. Tous les multiples de 5 (supérieurs à 5) ont comme diviseurs 1 , eux-mêmes et … 5 . Ils ne sont donc pas premiers. Supprimons tous les multiples de 5 (colonne contenant 5 et colonne contenant 10)

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

▶ Supprimons maintenant les multiples de 6. Ces nombres sont déjà supprimés. Un multiple de 6 est tout d'abord un multiple de 2 (et/ou de 3).

▶ 7 est un nombre premier. Supprimons les multiples de 7 supérieurs à 7. Plus difficiles à repérer dans le tableau !



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

▶ Supprimons maintenant les multiples de 8. Ces nombres sont déjà supprimés. Un multiple de 8 est tout d'abord un multiple de 2.

▶ Supprimons maintenant les multiples de 9. Ces nombres sont déjà supprimés. Un multiple de 9 est tout d'abord un multiple de 3.

Jusqu'où doit-on aller ? Jusqu'à $\sqrt{100}$, c'est-à-dire 10 !

Notons tout d'abord que $100 = 10 \times 10$. ($\sqrt{100} = 10$)
Nous avons déjà constaté que les multiples vont par paires (même s'ils sont identiques). Si un nombre de ce tableau (nombre inférieur à 100) a un diviseur supérieur à 10, le diviseur associé est nécessairement inférieur à 10. Nous pouvons donc arrêter la recherche à 10.

▶ Supprimons maintenant les multiples de 10. Ces nombres sont déjà supprimés. Un multiple de 10 est tout d'abord un multiple de 2.

Les nombres restants sont les nombres premiers inférieurs à 100 !!!!

Remarque importante :Nombres premiers entre eux

Rappelons que :

Deux nombres sont premiers entre eux (on dit aussi étrangers) s'ils n'ont pas de diviseurs communs (à part 1), c'est-à-dire si leur plus grand commun diviseur (PGCD) est égal à 1 .

ATTENTION :

Deux nombres premiers sont toujours premiers entre eux (étrangers)

Exemple: **7 et 13**

Mais, ceci n'est pas nécessaire

Exemple: **4 et 9** sont premiers entre eux (étrangers) sans être premiers (4 n'est pas un nombre premier et 9 n'est pas un nombre premier)

IMPORTANCE DES NOMBRES PREMIERS

Les nombres premiers sont les briques de la construction des entiers naturels.

Propriété :

Tout nombre entier naturel (supérieur à 1) est décomposable <u>de façon unique</u> en un <u>produit de facteurs premiers.</u>

Explications :

Par exemple, considérons le nombre 6.
Ce nombre peut s'écrire sous forme d'un produit de nombres premiers (et d'une seule manière). Nous avons :

$6 = 2 \times 3$ (2 et 3 sont des nombres premiers)

Autre exemple. Considérons 24.
Nous avons :

$24 = 2 \times 12 = 2 \times (2 \times 6) = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times (2 \times 3) = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ (produit de nombres premiers)

Nous écrirons, pour simplifier :

$24 = 2^3 x\ 3$

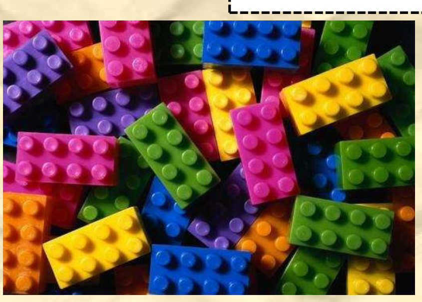
Et ceci est vrai pour tout nombre supérieur à 1.
Même si le nombre est premier :
7 se décompose en … 7 !

Comment obtenir pratiquement (et facilement) la décomposition d'un nombre ?

▶ <u>Décomposition en facteurs premiers de 60 :</u>

Nous disposerons la recherche comme ceci :

60	2
30	2
15	3
5	5
1	



▷ On écrit 60 à gauche d'un trait vertical.
▷ Puis, on recherche, si possible dans l'ordre, un facteur premier qui divise 60. Le premier nombre premier est 2

60 : 2 = 30

▷ On inscrit 2, sur la même ligne que 60 et le quotient 30 en dessous de 60.
▷ Puis on recommence ….
▷ 30 est divisible par le nombre premier 2. On écrit 2 sur la même ligne que 30 à droite.
▷ 30 : 2 = 15
▷ On inscrit 15 sur la troisième ligne. 2 ne divise pas 15, essayons le nombre premier suivant, c'est-à-dire 3.
▷ 15 : 3 = 5 . On inscrit 3 à droite de 15 et 5 sur une quatrième ligne à gauche.
▷ 5 (nombre premier) est divisible par 5 . On écrit 5 à sa droite et le quotient 1 sur la cinquième ligne.
▷ C'est fini !

Nous avons donc :

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

▶ Décomposition en facteurs premiers de 63 :

63	3
21	3
7	7
1	

$63 = 3^2 \times 7$

Remarque : (Par curiosité)

▶Reprenons le nombre 60.

▷ Quels sont les diviseurs de 60 ?

Attention à ne pas confondre cette recherche avec la décomposition présentée ci-dessus. La disposition semble être proche, mais la recherche est différente :

Les diviseurs de 60 sont donnés dans le tableau ci-contre :

1	60
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10

Nous en dénombrons 12.

▷ Reprenons la décomposition en facteurs premiers de 60 faite ci-dessus

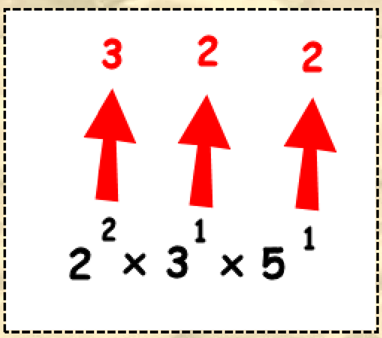
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Dans cette expression,

L'exposant du nombre premier 2 est …… 2

L'exposant du nombre premier 3 est …… 1 ($3 = 3^1$)

L'exposant du nombre premier 5 est …… 1 ($5 = 5^1$)



Ajoutons 1 à ces trois exposants :

$2 + 1 = 3$

$1 + 1 = 2$

$1 + 1 = 2$

Le produit de ces nouveaux nombres est

$3 \times 2 \times 2 = 12$

12 est le nombre de diviseurs de 60 !!!!

Reprenons le nombre 63.

La décomposition de 63 en facteurs premiers est la suivante (voir ci-dessus)

$$63 = 3^2 \times 7 = 3^2 \times 7^1$$

Ajoutons 1 aux exposants et multiplions ces nombres. Nous avons :

$$(2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$$

Nous pouvons affirmer que le nombre de diviseurs de 63 (sans les connaître) est 6

(Pour vérification , les diviseurs de 63 sont 1 , 3 , 7 , 9, 21 , 63)

RECHERCHE DU PGCD AVEC LES NOMBRES PREMIERS :

Cherchons le PGCD des deux nombres 60 et 48 :

Décomposons en un produit de facteurs premiers ces deux nombres. Nous avons :

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Nous obtenons :

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$48 = 2^4 \times 3$

Pour avoir le PGCD de 60 et 48, il suffit de prendre les facteurs premiers communs aux deux décompositions (ici 2 et 3 sont dans les deux décompositions, pas le nombre 5) …

Nous pouvons déjà écrire PGCD(60 , 48) = $2^? \times 3^?$

… et d'attribuer à ces deux nombres le plus petit des exposants.

Pour le nombre premier 2, l'exposant pour 60 est 2 et l'exposant pour 48 est 4. Le plus petit exposant est 2

Pour le nombre premier 3, l'exposant pour 60 est 1 et l'exposant pour 48 est 1. Le plus petit exposant est donc 1.

Donc PGCD(60 , 48) = $2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$