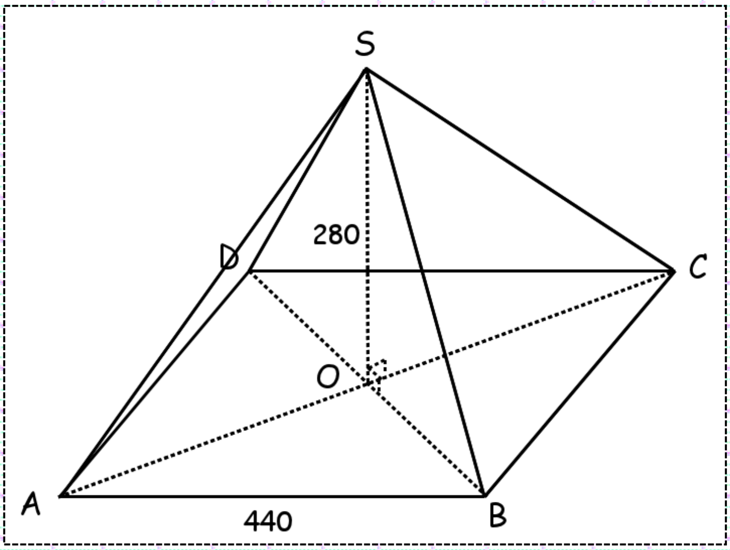
THEME : Correction
PYRAMIDE DE KHEOPS

Chiffres clefs de la pyramide de Khéops :



Question 1 :

Déterminer la longueur d'un côté de la base de cette pyramide, ainsi que sa hauteur en mètres (valeur approchée au centimètre)

La coudée royale ancienne mesurait environ 52,4 cm

▶ Côté du carré de base :

Le côté mesure 440 coudées.

Sa longueur en mètres est donc :

$$440 \times 52{,}4 = 23056 (\text{ cm })$$

Soit 230,56 mètres

▶ Hauteur de la pyramide :

La hauteur mesure 280 coudées.

$$280 \times 52{,}4 = 14672 (\text{ cm })$$

Soit 146,72 mètres

Remarque :

Les années ont endommagé la pyramide. La hauteur est maintenant d'environ 137 m à 138 m et les côtés de la base diffèrent légèrement du résultat obtenu

Question 2 :

a) Déterminer, en mètres carrés, puis en hectares, l'aire de la base de cette pyramide (Nous prendrons comme mesure du côté de base : 230 mètres)

Quelles sont les dimensions idéales d'un terrain de football ?

Quelle est, en mètres carrés, son aire ?

Comparer l' aire de la base de la pyramide à l'aire d'un terrain de football. Combien de terrains de football pourrait-on construire à son emplacement ?

b) En prenant comme dimensions 230 m pour le côté de la base et 147 m pour la hauteur initiale de la pyramide, calculer le volume, en m^3, de cette construction.

▶ Aire de la base de la pyramide de Khéops :

La base est un carré de côté 230 m.

Son aire est donc :

$$\mathcal{A}_{base} = 230 \times 230 = 52900 (m^2)$$

L'hectare est une mesure agraire (qui a rapport aux champs) et correspond à 10 000 m²

Son aire, en hectares , est donc :

$$\frac{52900}{10000} \text{ soit } 5{,}29 \text{ ha}$$

L'aire est de : 52900 m² ou 5,29 ha

▶ Dimensions d'un terrain de football :

La longueur est la moyenne des nombres 90 et 120 , soit $\frac{90+120}{2} = \frac{210}{2} = 105 (m)$

La largeur est la moyenne des nombres 45 et 90 , soit $\frac{45+90}{2} = \frac{135}{2} = 67{,}5 (m)$

▶ Aire d'un terrain de football :

L'aire d'un terrain de football est (aire d'un rectangle) :

$$105 \times 67{,}5 = 7087{,}5 (m^2)$$

▶ Comparaison des deux aires :

L'aire de la base de la pyramide de Khéops est de 52900 m². L'aire d'un terrain de football est de 7087,5 m².

$$\frac{52900}{7087{,}5} \approx 7{,}46$$

A l'emplacement de la pyramide, nous pourrions construire plus de 7 terrains de football !!!!

Remarque :

Pour montrer la grandeur de cette construction, nous pouvons également calculer le périmètre de la base.
Le périmètre est : $4 \times 230 = 920 (m)$, soit près d'un kilomètre pour faire le tour !!!

Remarque : La hauteur de la pyramide était, à l'origine de 147 m (maintenant environ 138 m). Si nous comparons cette hauteur à un bâtiment connu (l'église des Pieux, par exemple, d'une hauteur d'environ 30 m), nous avons $\frac{147}{30} \approx 4{,}9$, ce qui signifie que la pyramide est, à peu près, cinq fois plus haute que l'église que nous connaissons !!!

▶ Volume initial de la pyramide :

Le volume de la pyramide est (aire de la base : 52900 m² ; hauteur : 147 m) :

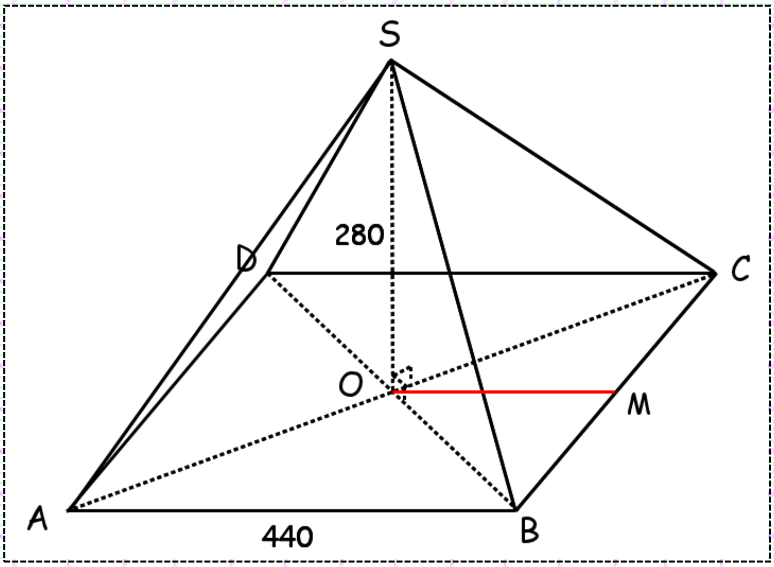
$$\frac{52900 \times 147}{3} \approx 2592100 \ (m^3)$$

Le volume était d'environ 2 592 100 m³.

Question 3 :

▶ a) Calcul de OM (en coudées) :

Différentes solutions sont possibles
(théorème de Thalès par exemple)
Utilisons une méthode plus appropriée.



Dans le triangle ABC,

O est milieu de [AC] (Dans un carré, les diagonales ont même milieu)

M est milieu de [BC] (hypothèse)

Donc , d'après le théorème des milieux (et son supplément) , les droites (OM) et (AB) sont parallèles et, ce qui nous intéresse :

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{440}{2} = 220\,(\text{coudées})$$

OM = 220 (coudées)

▶ b)Calcul, en coudées, de l'apothème [SM] :

Dans le triangle SOM rectangle en O,
Nous avons, d'après le théorème de Pythagore :

$SM^2 = OM^2 + OS^2$

$M^2 = 220^2 + 280^2 = 48400 + 78400 = 126800$

$SM = \sqrt{126800} \approx 356{,}09 \approx 356$ (coudées) SM = 356 (coudées)

▶ c)Calcul de la pente :

Dans le triangle SOM rectangle en O, nous avons :

$$\tan(\widehat{OMS}) = \frac{OS}{OM} = \frac{280}{220} = \frac{28\times 10}{22\times 10} = \frac{28}{22} = \frac{2\times 14}{2\times 11} = \frac{14}{11}$$

Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{OMS}$:

$\tan(\widehat{OMS}) = \frac{14}{11}$ donc $\widehat{OMS} \approx 51{,}8°$ soit environ 52°

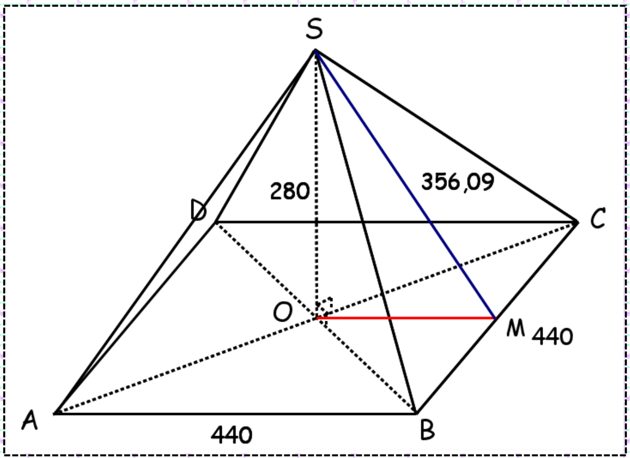
Mystères de la pyramide de Khéops :

▶ a) A propos d'Hérodote :

▷ Calcul de l'aire d'un carré dont le côté est égal à la hauteur de la pyramide :

La hauteur est de 280 coudées, donc l'aire d'un carré dont le côté est égal à cette hauteur est :

$280^2 = 78400$ coudées carrées



▷ Calcul de l'aire d'une face latérale de la pyramide.

La face latérale est un triangle de base 440 coudées et de hauteur 356,09 coudées (voir calcul ci-dessus).

$$\frac{440\times 356{,}09}{2} = 78339{,}8 \text{ (coudées carrées)}$$

▷ Comparaison :

Nous constatons que les valeurs sont très proches .
L'affirmation d'Hérodote n'est donc pas fausse.

La question à se poser est de savoir si les architectes de cette pyramide ont intentionnellement mis en œuvre cette propriété.

L'aire de chacune des faces de la pyramide est égale à la hauteur de la pyramide élevée au carré.

▶ b) Le nombre π :

▷ Calcul du demi-périmètre de la base de la pyramide :

$$2 \times 440 = 880 \text{ (coudées)}$$

▷ Calcul du rapport du demi-périmètre par la hauteur de la pyramide.

$$r = \frac{880}{280} \approx 3{,}1428$$

▷ Conclusion :

Ce nombre est très proche du nombre π.

Le rapport r est égal à 3.1428 et π est égal (valeur approchée) à 3.1415

La différence (au dix millième) est de 0,0013, soit un pourcentage d'erreur d'environ 0,0004 % .

Remarque :

Le rapport que vous obtenez est égal à $\frac{22}{7}$, rapport souvent utilisé comme valeur approchée du nombre π.

Mais les Egyptiens ne connaissaient pas, à cette époque, le nombre π avec une telle précision.