

THEME 8

PYRAMIDES ET CONES AGRANDISSEMENT ET REDUCTION

RAPPELS

Volume d'une pyramide :

$$\frac{B \times h}{3} \text{ avec } B : \text{aire de la base et } h \text{ hauteur de la pyramide}$$

Volume d'un cône

$$\frac{B \times h}{3} \text{ avec } B : \text{aire de la base et } h \text{ hauteur du cône}$$

$$\text{ou } \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} \text{ avec } r \text{ rayon de la base pour un cône de révolution}$$

SAVOIR CALCULER LE VOLUME D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CONE :

Exercice 1 : La ruche

Une ruche se compose d'un parallélépipède à base carrée de 50 cm de côté et de 40 cm de hauteur, surmonté d'une pyramide de même base qui a 30 cm de haut.

Quel est le volume de cette ruche ?

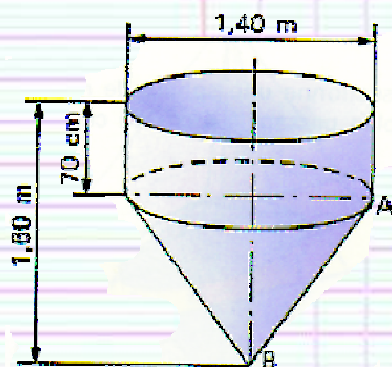
Exercice 2 : Au cirque

Le chapiteau d'un cirque a la forme d'un cylindre ayant 12 m de rayon et 3 m de hauteur, surmonté d'un cône dont le sommet est situé à 12 m du sol.

Quel est le volume d'air sous le chapiteau ?

Exercice 3 : Le contrepoids d'horloge

Un contrepoids d'horloge en fer a la forme d'un cône de 3 cm de rayon et 9 cm de hauteur. Un centimètre cube de fer pèse 7,8 g. Trouver combien pèse ce contrepoids (à 1 dg près).



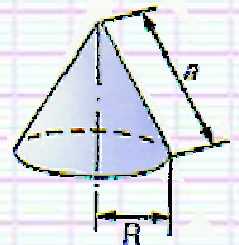
Exercice 4 : Le réservoir (C.A.P. Mécanique 84)

Un réservoir d'eau est formé d'une partie cylindrique et d'une partie conique.

a) Calculer son volume.

b) Calculer son aire (il n'y a pas de couvercle)

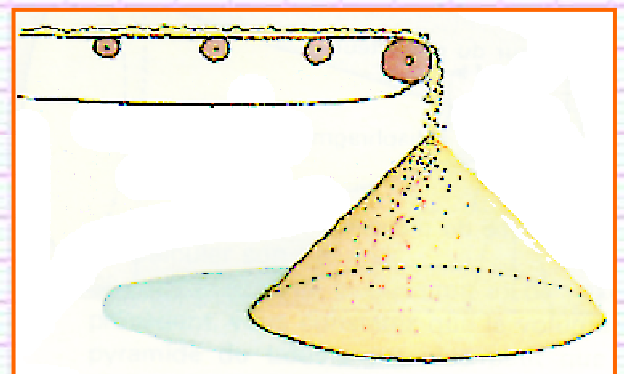
(Formule de l'aire latérale d'un cône : $\pi R a$)



Exercice 5 : Le tas de sable.

Lorsqu'une bande transporteuse dépose du sable sec, on obtient un tas conique, et l'angle formé par l'horizontale et le bord du tas mesure environ 33° .

Calculer le volume d'un tas de sable ayant 2,50 m de diamètre.



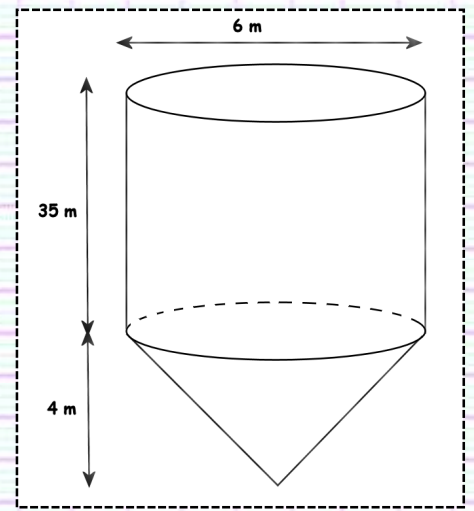
Exercice 6 : Brevet - Groupe Est - 2005

On s'intéresse dans cet exercice au réservoir de la fusée XYZ2005, nouveau prototype de fusée interplanétaire.

Ce réservoir est constitué d'un cône surmonté d'un cylindre, comme le montre le dessin ci-contre.

Le diamètre du réservoir est de 6 m, le cylindre mesure 35 m de hauteur et le cône 4 m de hauteur.

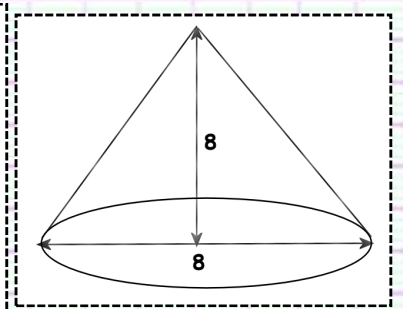
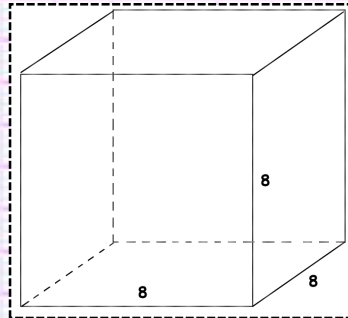
1. Calculer le volume total du réservoir ; on donnera d'abord la valeur exacte en m^3 , puis la valeur en dm^3 , arrondie au dm^3 .
2. Le volume de ce réservoir est-il suffisant pour que les moteurs de la fusée fonctionnent pendant 10 minutes, sachant que ces moteurs consomment 1500 litres de carburant par seconde ?



Exercice 7 : Brevet - Poitiers 1997

Un cube a des arêtes de 8 cm. Un cône de révolution a une base de 8 cm de diamètre et une hauteur de 8 cm.

- 1) Calculer le volume du cube.
- 2) a) Calculer la valeur exacte du volume du cône.
b) Quel est le volume du cône arrondi au cm^3 ?
- 3) On place le cône à l'intérieur du cube. Occupe-t-il plus de 30 % du volume du cube ? Justifier votre réponse.

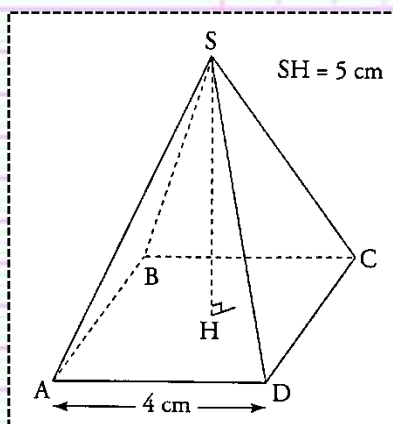
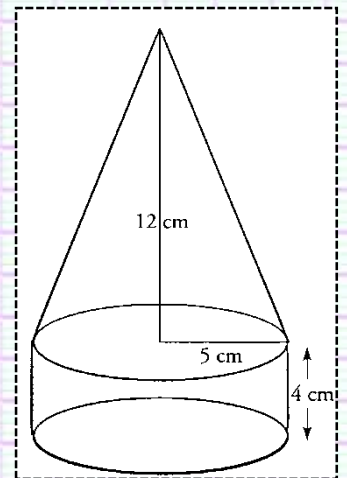


Exercice 8 : Brevet - Rouen - 1997

L'objet ci-contre est constitué d'un cylindre et d'un cône de révolution ayant une base commune dont le rayon mesure 5 cm. La hauteur du cône mesure 12 cm, celle du cylindre mesure 4 cm.

On désigne par V_1 le volume du cône, par V_2 le volume du cylindre, et V_T est le volume total de l'objet.

- 1) Calculer les valeurs exactes de V_1 et V_2 . Vérifier que $V_1 = V_2$.
- 2) En déduire la valeur exacte du volume total V_T puis en donner une valeur arrondie au cm^3 .



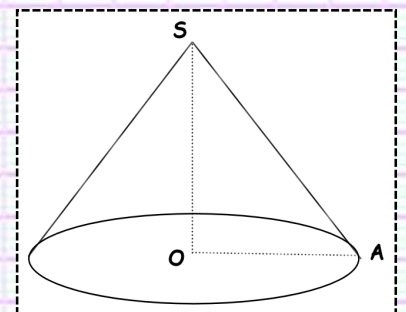
Exercice 9 : Brevet - Aix - 1998

Une pyramide régulière est représentée ici en perspective : (dessin à gauche)

1. Sur le solide SABCD, nommer les arêtes de même longueur que [SA].
Quelle est la nature de la face ABCD ? Expliquer.
2. Calculer le volume de la pyramide SABCD.

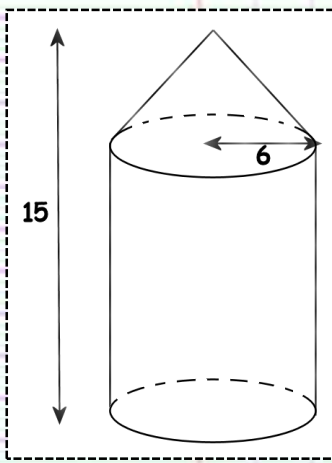
Exercice 10 : Brevet - Grenoble - 1998

La figure ci-contre représente un cône de hauteur $SO = 20$ cm et de base le cercle de



rayon $OA = 15$ cm.

1. Calculer, en cm^3 , le volume de ce cône; on donnera la valeur exacte sous la forme $k\pi$ (k étant un nombre entier).
2. Montrer que $SA = 25$ cm.
3. L'aire latérale de ce cône est donnée par la formule $\pi \times R \times SA$ (R désignant le rayon de la base). Calculer, en cm^2 , cette aire ; on donnera la valeur exacte sous la forme $n\pi$ (n étant un nombre entier), puis une valeur arrondie à 10^{-1} près.



Exercice 11 : Brevet - Poitiers - 1998

Un pigeonnier d'une hauteur totale de 15 mètres est formé d'une tour cylindrique de rayon 6 mètres, surmontée d'un toit conique.

1. Quelle est la hauteur de la tour, sachant qu'elle est égale aux deux tiers de la hauteur totale ?
2. Trouver la valeur exacte de l'aire de la surface latérale de la tour cylindrique.
3. Quel est le volume total du pigeonnier ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au mètre cube près.

Longueurs **$\times k$**

Aires **$\times k^2$**

Volumes **$\times k^3$**

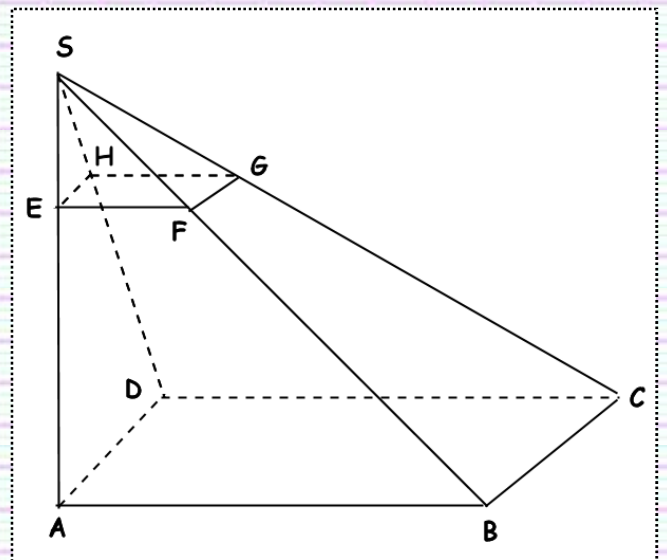
SAVOIR UTILISER LES COEFFICIENTS D'AGRANDISSEMENT ET DE REDUCTION :

Exercice 12 : Brevet - Nord - 2006

Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide à base carrée de hauteur [SA] telle que $AB = 9$ cm et $SA = 12$ cm. Le triangle SAB est rectangle en A.

EFGH est la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base et telle que $SE = 3$ cm.

- 1) a) Calculer EF. ((EF) et (AB) sont parallèles)
- b) Calculer SB.
- 2) a) Calculer le volume de la pyramide SABCD.
- b) Donner le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SEFGH.
- c) En déduire le volume de SEFGH. On donnera une valeur arrondie à l'unité.

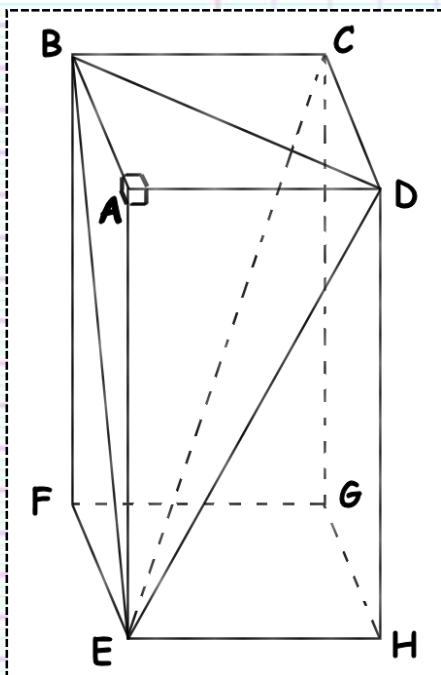


Exercice 13 : Brevet - Afrique 3 - 1995

Voici, représenté en perspective cavalière, un parallélépipède rectangle ou pavé droit ABCDEFGH. La face ABCD est un carré de 3 cm de côté.

On donne $HD = 6$ cm.

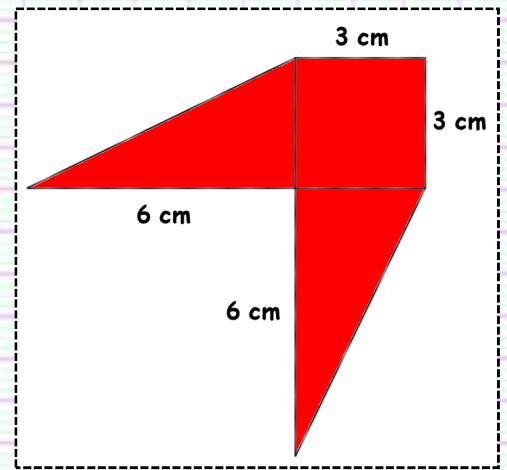
- 1) Déterminer les longueurs des segments [BD] et [DE]. On donnera les valeurs exactes de ces mesures.
- 2) Le triangle EDC est rectangle en D. Calculer la longueur exacte de son hypoténuse.
- 3) On considère la pyramide de sommet E, de base ABCD et de hauteur [EA]. Montrer que son volume est 18 cm^3 .
- 4) Compléter le patron de la pyramide EABCD représenté à la fin du problème.



5) On fabrique cette pyramide à partir du pavé droit. Quel est le volume perdu au cours de cette opération ?

6) La pyramide ainsi obtenue est une maquette à l'échelle 1/50 d'une pyramide réelle.

Calculer la hauteur, l'aire de la base et le volume de la pyramide réelle.

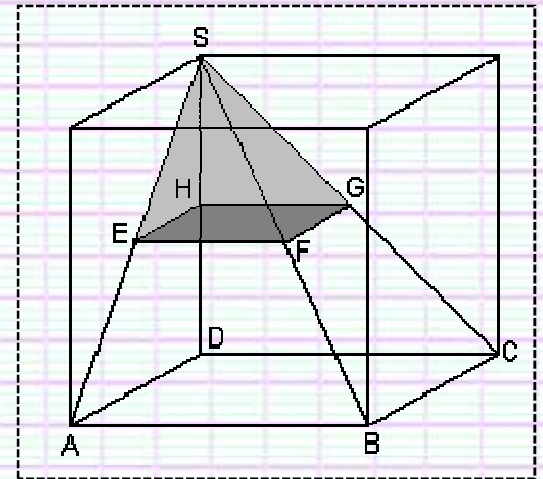


Voici l'ébauche d'un patron de la pyramide EABCD.

Exercice 14 :

La pyramide SEFGH est une réduction à l'échelle $\frac{1}{3}$ de la pyramide SABCD.

- 1) L'arête SA mesure 24 cm. Quelle est la longueur réelle de SE ?
- 2) L'aire de la base ABCD est de 144 cm^2 . Quelle est l'aire de la base de la pyramide réduite SEFGH ?
- 3) L'aire totale des faces de la pyramide réduite SEFGH est de $56,348 \text{ cm}^2$. Quelle est l'aire totale des faces de la pyramide SABCD ?
- 4) Le volume de la pyramide SABCD représentée ci-contre est de $480,6 \text{ cm}^3$. Quelle est le volume de la pyramide réduite SEFGH ?



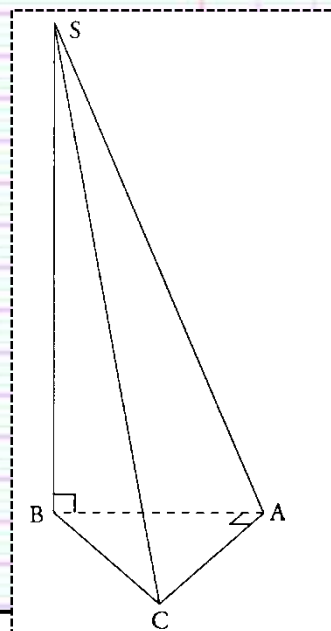
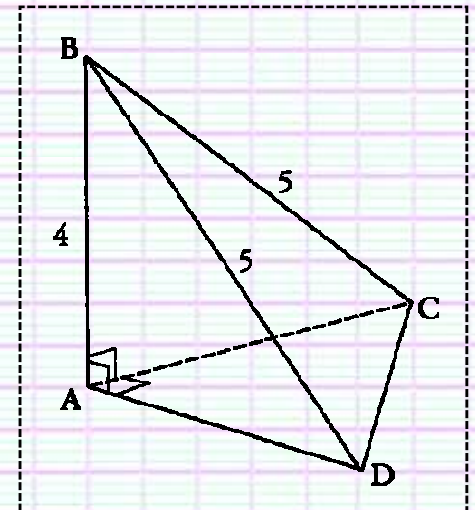
Exercice 15 : Brevet - Nancy - Septembre 95

L'unité est le centimètre.

La pyramide ABCD est telle que :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 90^\circ ; \quad AB = 4 \quad \text{et} \quad BC = BD = 5$$

1. Calculer AD.
2. Montrer que le triangle CAD est rectangle et isocèle. Préciser et justifier la valeur de l'angle \widehat{ACD} .
3. Calculer le volume de la pyramide.
4. Cette pyramide est la réduction à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une pyramide en bois. Quel est le volume de la pyramide en bois ?



Exercice 16 : Brevet - Rennes - 97

On considère une pyramide de hauteur $SB = 7 \text{ cm}$ et dont la base est un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$.

- 1) Construire un patron de cette pyramide.
- 2) Calculer le volume de cette pyramide.
- 3) On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base ; on obtient les points B' sur $[SB]$, A' sur $[SA]$ et C' sur $[SC]$ tels que $\frac{SB'}{SB} = \frac{3}{7}$.

a) Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$?

b) Calculer le volume de la pyramide $SA'B'C'$.

On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au mm^3 .

Exercice 17 : Brevet - Besançon - 99

Un pigeonnier est composé d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH et d'une pyramide SEFGH dont la hauteur [SO] mesure 3,1 m.

On sait que $AB = 3$ m, $BC = 3,5$ m et $AE = 4$ m.

1. Calculer la longueur BD et en déduire celle de BH. On donnera des valeurs approchées de ces résultats à 10^{-1} près.

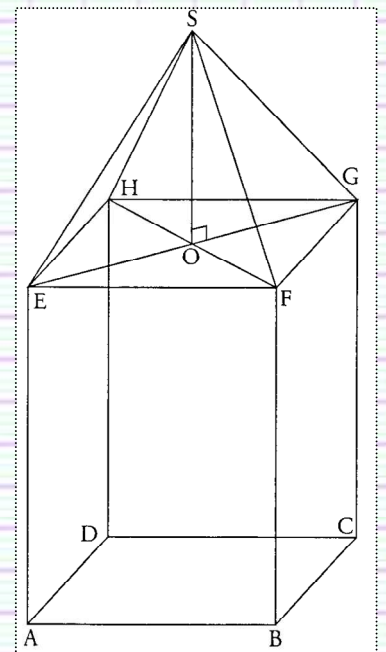
2. Calculer en m^3 le volume V_1 de ce pigeonnier.

3. Un modéliste désire construire une maquette de ce pigeonnier à l'échelle $\frac{1}{24}$. Calculer en dm^3 le volume V_2 de la maquette.

On donnera une valeur approchée de ce résultat à 10^{-3} près.

Exercice 18 : Brevet - Amiens - Septembre 97

Une boîte de crème glacée a la forme du tronc de pyramide ABCDEFGH ci-dessous,



- ABCD est un carré de centre O
- EFGH est un carré de centre O'
- [SO] est la hauteur de la pyramide régulière SABCD
- ABCD et EFGH sont dans des plans parallèles
- On donne : $AB = 16$ cm $EF = 12$ cm $OS = 32$ cm

1. Dans le triangle SAB, calculer $\frac{SE}{SA}$ (justifier la réponse).

En déduire que $\frac{SO'}{SO} = \frac{3}{4}$

2. Calculer SO' puis la profondeur OO' de la boîte.

3. Calculer le volume de la pyramide SABCD puis celui de la pyramide SEFGH (donner les valeurs exactes).

En déduire le volume de la boîte de crème glacée (le résultat sera

arrondi au cm^3).

4. Le volume de cette boîte sera-t-il suffisant pour y mettre 1,5 litre de crème glacée ?

Exercice 19 : Brevet - Martinique - 98

SABCD est une pyramide de hauteur [SA] et dont la base ABCD est un carré. On sait que :

$$SC = 10\sqrt{2} \text{ cm et } AC = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

Le triangle SAC est rectangle en A.

1. Calculer SA.

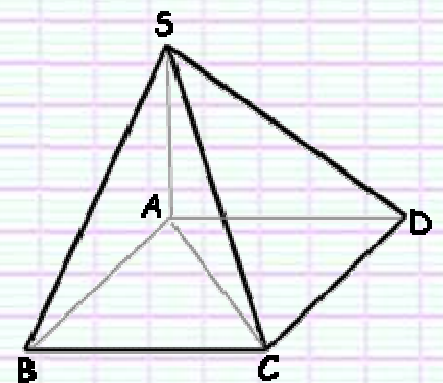
2. a) Montrer que le côté de la base mesure 8 cm.

b) Calculer le volume de la pyramide.

3. Un plan parallèle à la base coupe respectivement [SA], [SB], [SC] et [SD] en A', B', C' et D'. On sait que $SA' = 4$ cm.

a) Justifier que A'B'C'D' est un carré.

b) Montrer que la mesure en cm d'un côté est $\frac{8\sqrt{2}}{3}$



Exercice 20 : Brevet - Allemagne - 96

Un triangle A'B'C' rectangle en A' et d'aire 27 cm^2 est un agrandissement d'un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $AC = 2$ cm.

Calculez les longueurs A'B' et A'C'.

Exercice 21 : Brevet - Grenoble - Septembre 97

C_1 et C_2 sont deux cubes.

On suppose que $CD = 3AB$.

1. S'il faut 2 kg de laque pour peindre C_1 , combien en faut-il pour peindre C_2 ?

(On admet que la masse de laque et l'aire peinte sont proportionnelles.)

2. Si C_2 contient 113,4 litres, combien en contient C_1 ?

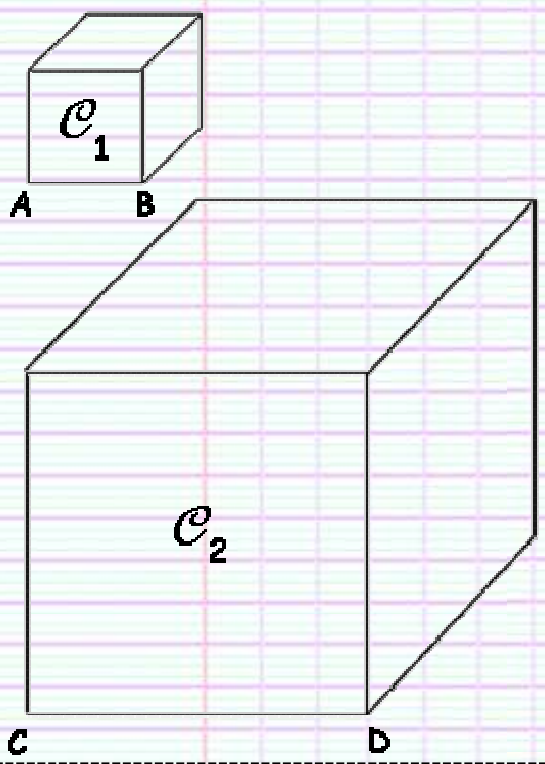
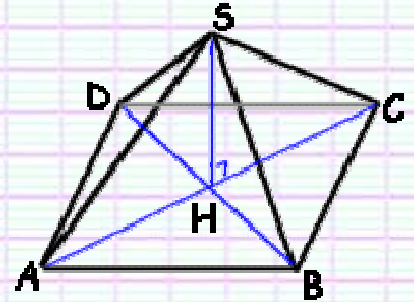
Exercice 22 : Brevet - Caen - 96

SABCD est une pyramide régulière à base carrée de 24 m de côté.

La hauteur [SH] mesure 12 m.

1) Calculer, en m^3 , le volume V_1 de cette pyramide.

2) A l'intérieur de la pyramide, on construit une salle en forme de demi-boule de centre H et de



rayon 8 m. Calculer le volume V_2 de la demi-boule en m^3 . Donner le résultat arrondi à $1 m^3$ près.

3) On réalise une maquette à l'échelle 1/20. V_3 est le volume en m^3 de la pyramide réduite.

a) Par quelle fraction doit-on multiplier V_1 pour obtenir V_3 ?

b) En déduire la valeur de V_3 .

Exercice 23 : Brevet - Orléans - 96

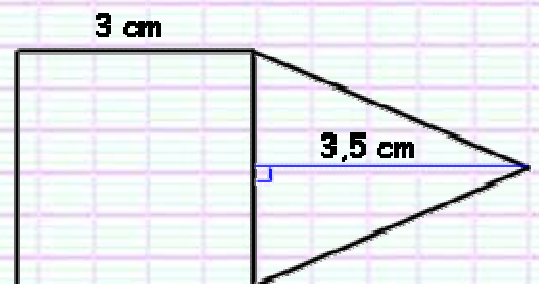
La figure ci-contre représente une partie d'un patron de pyramide régulière à base carrée.

1) Reproduire cette figure sur votre feuille en respectant les dimensions indiquées, puis la compléter pour obtenir un patron de la pyramide.

2) Calculer l'aire totale du patron exprimée en cm^2 .

3) On voudrait construire une nouvelle pyramide dont les dimensions sont le quadruple de celles de la pyramide précédente.

Quelle serait alors l'aire totale, exprimée en cm^2 , d'un patron de la nouvelle pyramide ?



Exercice 24 : Brevet - Antilles - 96

On se donne une pyramide P_1 ayant une base carrée de 8 cm de côté et une hauteur de 12 cm.

Une pyramide P_2 est un agrandissement de P_1 dont un côté de la base mesure 20 cm.

1) Calculer le coefficient de l'agrandissement.

2) a) Calculer le volume de la pyramide P_1 .

b) Calculer le volume de la pyramide P_2 .

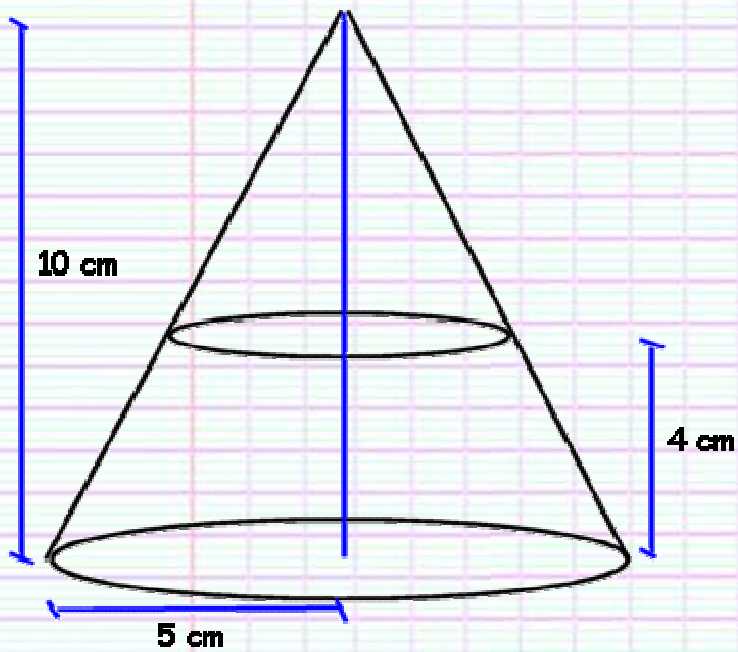
Exercice 25 : Brevet - Caen - 99

Un cône a pour base un disque de 6 cm de rayon et pour hauteur 15 cm.

1. Calculer son volume V en cm^3 (en donner la valeur exacte, exprimée en fonction de π).

2. On réalise une maquette du cône à l'échelle $\frac{2}{5}$.

Calculer le volume V' de cette maquette, arrondi au cm^3



Exercice 26 : Brevet - Rennes - 95

Un objet transparent a la forme d'un cône. Sa hauteur est 10 cm.

Le rayon de sa base est 5 cm.

- 1) Quel est son volume arrondi au cm^3 près ?
- 2) Il est rempli d'un liquide coloré. Au repos, le cône est posé sur sa base : la hauteur du liquide dans le cône est 4 cm.

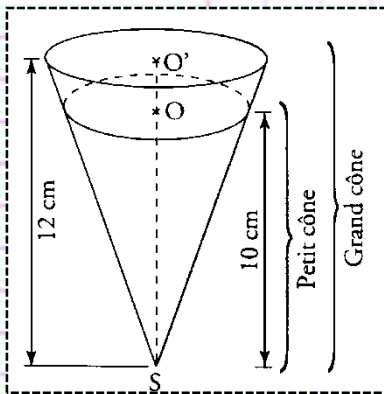
- a) Faire un schéma.
- b) Quel est le volume du liquide arrondi au cm^3 près ?

Exercice 27 : Brevet - Lille - 97

Un cornet de glace appelé « petit cône » a la forme d'un cône de hauteur $SO = 10$ cm, de rayon de disque de base $OA = 3$ cm.

La représentation en perspective est donnée ci-contre.

- 1) Démontrer que le volume exact de glace contenue dans le « petit cône » (celui-ci étant rempli) est $30\pi \text{ cm}^3$.
- 2) Pour l'été, l'entreprise décide de fabriquer des « grands cônes », la hauteur d'un « grand cône » étant de 12 cm.



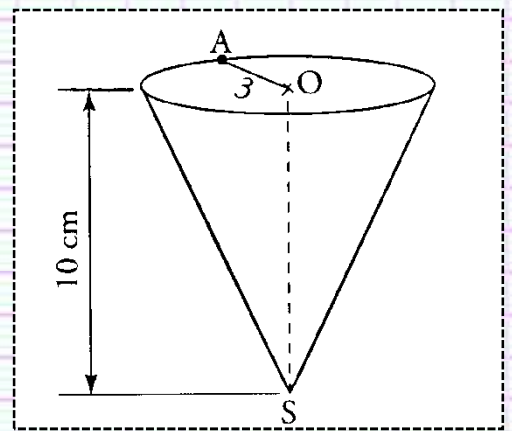
la hauteur d'un « grand cône » étant de 12 cm.

- a) Le « grand cône » étant un agrandissement du « petit cône », calculer l'échelle d'agrandissement.

- b) En déduire que le volume du « grand cône » est $51,84 \pi \text{ cm}^3$.

- c) Quelle quantité de glace supplémentaire a-t-on lorsqu'on achète un « grand cône » plutôt qu'un « petit cône » ?

On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur approchée à 1 centilitre près.



Exercice 27 : Brevet - Grenoble - 1995

Partie I

La figure ci-contre représente un solide. Celui-ci se compose d'un parallélépipède rectangle surmonté d'une pyramide régulière à base carrée de sommet S et dont les faces latérales sont des triangles isocèles.

Les dimensions de la figure sont les suivantes:

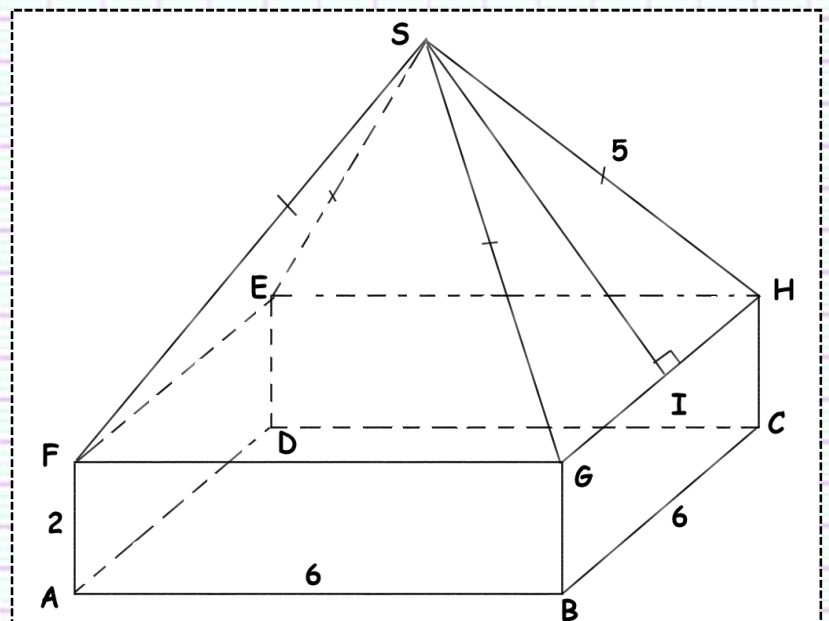
$AF = 2$ cm ; $AB = BC = 6$ cm ;

$SH = 5$ cm.

- 1) Représenter le triangle SGH en respectant les dimensions données.

- 2) a) Calculer la longueur de la hauteur SI du triangle SGH.

- b) En déduire l'aire du triangle SGH.



3) Montrer que l'aire extérieure totale du solide (face inférieure comprise) est de 132 cm^2 .

Partie II

La figure précédente est la réduction à l'échelle $\frac{1}{4}$ d'un coffret qu'un artisan désire réaliser. Il se propose de le couvrir intérieurement de feuilles d'or très fines, de calculer la masse d'or nécessaire ainsi que le prix de l'or à acheter.

1) Calculer l'aire réelle extérieure du coffret.

2) Sachant que pour couvrir une surface de 1 cm^2 , il faut $0,00195 \text{ g}$ d'or, calculer la masse d'or pour recouvrir l'objet au centième de gramme près.

3) Le découpage des feuilles d'or occasionne des pertes.

L'artisan prévoit d'acheter 25 % d'or supplémentaire.

Le prix du kilogramme d'or est de $70\,000 \text{ F}$. Calculer le prix de tout l'or à acheter.

Exercice 28 : Brevet - Clermont - 2000

Lors d'un transport exceptionnel sur route, un objet est protégé dans une caisse dont la forme est un prisme droit représenté ci dessous. Toutes les longueurs sont exprimées en mètres.

On considère une base du prisme, inscrite dans le rectangle FGCD :

$FG = 12$ et $GC = 8$

Sur le côté $[GC]$, on a placé le point B tel que $GB = 3\sqrt{3}$.

Sur le côté $[FG]$, on a placé :

➤ le point E tel que $EF = EG$,

➤ le point A tel que $\angle GBA = 30^\circ$.

On rappelle que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ et $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1^{ère} PARTIE

1. Exprimer $\cos 30^\circ$ dans le triangle AGB.

En déduire $AB = 6$

2. Exprimer de même $\sin 30^\circ$ dans le triangle AGB.

En déduire $AG = 3$

3. Calculer ED.

4. Vérifier que le pentagone ABCDE a un périmètre égal à $39 - 3\sqrt{3}$.

5. Sachant que le prisme droit a une hauteur de 5 mètres, calculer son aire latérale.

2^{ème} PARTIE

1. Calculer l'aire du rectangle FGCD.

2. Calculer les aires des triangles DFE et AGB.

3. En déduire la valeur exacte de l'aire du pentagone ABCDE.

4. Montrer que l'aire totale du prisme droit est égale à $339 - 24\sqrt{3}$.

En donner une valeur arrondie au dixième de mètres carrés près.

3^{ème} PARTIE

On souhaite recouvrir cette caisse de deux couches de peinture. Un pot de peinture permet de recouvrir une surface de 25 m^2 pour la première couche ; la deuxième couche nécessite 35 % de peinture de moins que la première couche.

Pour des raisons pratiques on prendra pour valeur de l'aire totale, 298 m^2 . Calculer :

1. le nombre de pots nécessaires pour la première couche (résultat arrondi à l'unité près).

2. le nombre de pots nécessaires pour la seconde couche (résultat arrondi à l'unité près).

3. le nombre de pots indispensables pour la première couche (résultat arrondi à l'unité près).

