THEME 8

RACINE CARREE

TYPES D'EXERCICES SOUVENT RENCONTRES

1er type d'exercice

Rappel :

▶ Nous connaissons la valeur de certaines racines carrées.

Par exemple :

$\sqrt{4} = 2$ (car $2^2 = 4$) , $\sqrt{36} = 6$ (car $6^2 = 36$) , $\sqrt{1} = 1$ (car $1^2 = 1$)

$\sqrt{100} = 10$ (car $10^2 = 100$) $\sqrt{121104} = 348$ (car $348^2 = 121104$) (avec l'aide de la calculatrice !!!)

$\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ (car $1{,}5^2 = 2{,}25$) ….

Mais il est impossible de donner une valeur sous forme décimale de $\sqrt{2}$, de $\sqrt{3}$, de $\sqrt{8}$, …

D'après le cours , nous savons qu'il existe (??) un nombre dont le carré est 2, mais nous ne pouvons pas en donner la valeur… décimale (cette valeur décimale n'existant pas !)

Pour $\sqrt{2}$, la calculatrice donne comme valeur approchée : **1,414213562** (il existe d'autres chiffres après le 2)

Ce nombre 1,414213562 élevé au carré donne (à la calculatrice) :

$$1{,}414213562^2 = 1{,}999999999 \quad \text{(mais pas 2 !!!)}$$

Nous savons que ce nombre $\sqrt{2}$ est compris entre 1,4 et 1,5, ou, avec plus de précision, entre 1,41 et 1,42 , ou encore entre 1,414213562 et 1,414213563 , mais nous ne pouvons pas lui donner une valeur décimale .

Par contre, il existe des racines carrées faciles à connaître. Ce sont les racines carrées des nombres appelés des « carrés parfaits » (Un carré parfait est le carré d'un entier) .

Par exemple 1 , 4 , 9 , 16 , 25 ,… sont des carrés parfaits .

Elévation au carré

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
Carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	…

Racine carrée

Ces quelques carrés parfaits sont à connaître.

Par exemple, le carré de 7 est 49 , donc la racine carrée de 49 est 7.

$\sqrt{49} = 7$

De même, le carré de 8 est 64 , donc la racine carrée de 64 est 8.

$\sqrt{64} = 8$

Nous avons donc le tableau suivant :

Nombre		4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	…
Racine carrée		$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	…

▶ Une propriété du cours :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \text{avec a et b positifs}$$

Remarque :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Conséquences :

Cette propriété, concernant la multiplication et les racines carrées, va nous permettre de simplifier certaines racines carrées.

▷ Simplifions par exemple $\sqrt{8}$.

Cherchons si le nombre 8 est égal au <u>produit</u> d'un <u>carré parfait</u> par un autre nombre .

Nous avons 8 = 4 x 2.

Donc : $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

▷ Simplifions $\sqrt{32}$.

Quel carré parfait est un diviseur de $\sqrt{32}$?

En les prenant dans l'ordre croissant, nous constatons que le carré parfait 4 est un diviseur de 32

Nous avons donc :

$$\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{4} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$$

Mais la simplification n'est pas totale. $\sqrt{8}$ peut encore se simplifier comme nous l'avons vu précédemment.

$$\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{4} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 2\sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 \times \sqrt{2} = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Il est cependant possible d'effectuer cette simplification plus rapidement. Si 4 est un diviseur de 32, il existe parmi les carrés parfaits inférieurs à 32 (4 , 9 , 16 , 25) un autre diviseur de 32. Le carré parfait 16 divise 32. Nous avons donc :

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

▷ Simplifions $\sqrt{12}$.

4 est un carré parfait et divise 12. Nous avons donc :

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

(3 n'étant pas divisible par un carré parfait de la liste donnée, la simplification est terminée.)

Et si nous écrivions 12 comme le produit de 6 par 2 ? Cette façon de faire n'est pas à conseiller puisque ni 6 , ni 2 ne sont des carrés parfaits. Cependant, nous pouvons écrire

$$\sqrt{12} = \sqrt{6 \times 2} = \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Exercice 1:

Simplifier les écritures suivantes :

$A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$ $\qquad$ $B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$

$C = \sqrt{96} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$ $\qquad$ $D = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$

Correction :

> **Les carrés parfaits :** (sauf 1)
> 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100 , …
> *et la racine carrée de ces carrés parfaits :*
> $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$,
> $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, …

▶ $A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$

Simplifions les différentes racines de cette expression.

Nous avons :

$\sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = \sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = 3\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{125} = \sqrt{25\times5} = \sqrt{25}\times\sqrt{5} = 5\times\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Remplaçons, dans l'expression A, ces racines carrées par leurs écritures simplifiées.

Nous avons :

$A = 2\times2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$

$A = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = (4 - 3 + 5)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ $\qquad$ $A = 6\sqrt{5}$

Remarque : Une autre rédaction est souhaitée. Au lieu de simplifier séparément les différentes racines, nous pouvons, dans l'expression A, les simplifier simultanément.

▶ $B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$

Nous avons successivement :

$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{4\times12} + 5\sqrt{4\times3}$

$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{4}\times\sqrt{12} + 5\sqrt{4}\times\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{3} - 3\times2\times\sqrt{12} + 5\times2\times\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{3} - 6\sqrt{12} + 10\sqrt{3}$

$B = 17\sqrt{3} - 6\sqrt{12}$

Nous devons continuer et simplifier $\sqrt{12}$

$B = 17\sqrt{3} - 6\sqrt{4}\times\sqrt{3} = 17\sqrt{3} - 6\times2\times\sqrt{3} = 17\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

La simplification de $\sqrt{48}$ a été exécutée en deux étapes. La rédaction pouvait être plus rapide en constatant que $48 = 16\times3$. Nous obtenons alors :

$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{16\times3} + 5\sqrt{4\times3}$

$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{16}\times\sqrt{3} + 5\sqrt{4}\times\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{3} - 3\times4\times\sqrt{3} + 5\times2\times\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ $\qquad$ $B = 5\sqrt{3}$

▶ $C = \sqrt{96} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$

Essayons de déterminer dans chaque radicande (nombre situé sous le radical) le carré parfait le plus grand possible.

$C = \sqrt{16\times6} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{4\times6} - 3\sqrt{9\times6}$

$C = \sqrt{16}\times\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{4}\times\sqrt{6} - 3\sqrt{9}\times\sqrt{6}$

$C = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2\times2\sqrt{6} - 3\times3\sqrt{6}$

$C = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - 9\sqrt{6} = -7\sqrt{6}$ $\qquad$ $C = -7\sqrt{6}$

▶ $D = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$

$D = 2\sqrt{16\times2} - 3\sqrt{25\times2} + 6\sqrt{4\times2}$

$2\sqrt{16}\times\sqrt{2} - 3\sqrt{25}\times\sqrt{2} + 6\sqrt{4}\times\sqrt{2}$

$D = 2\times4\times\sqrt{2} - 3\times5\times\sqrt{2} + 6\times2\times\sqrt{2}$

$D = 8\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\qquad$ $D = 5\sqrt{2}$

Exercice 2 : Brevet des Collèges - Guadeloupe-Guyane-Martinique – 97

Ecrire le nombre suivant sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant deux entiers avec b entier positif le plus petit possible.

$$D = 2\sqrt{75} \times \sqrt{6}$$

Correction :

rfaits : (sauf 1)
, 36 , 49 , 64 , 81 , 100 , …
rée de ces carrés parfaits :
$= 3 \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$,
$49 = 7$, …

$$D = 2\sqrt{75} \times \sqrt{6}$$

Attention, cette expression n'est pas une somme (ou une différence) , mais un <u>produit</u> !

▷ Méthode 1 :

Cette méthode est peu conseillée, même si, dans notre cas, elle peut être rapide. Il est préférable, en Mathématiques, de travailler avec des "petits" nombres plutôt qu'avec des "grands" !

La propriété $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ peut (et doit) être lue dans les deux sens. Nous pouvons, et uniquement dans un produit, regrouper les racines carrées.

$$D = 2\sqrt{75} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{75 \times 6} = 2\sqrt{450}$$

Nous devons maintenant simplifier cette expression.

$$D = 2\sqrt{450} = 2\sqrt{9 \times 50} = 2\sqrt{9} \times \sqrt{50} = 2 \times 3 \times \sqrt{50} = 6\sqrt{50}$$

Continuons :

$$D = 6\sqrt{50} = 6\sqrt{25 \times 2} = 6\sqrt{25} \times \sqrt{2} = 6 \times 5 \times \sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

▷ Méthode 2 :

Simplifions chaque " racine carrée " (Seul $\sqrt{75}$ est simplifiable) . Nous avons :

$$D = 2\sqrt{25 \times 3} \times \sqrt{6}$$

$$D = 2\sqrt{25} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}$$

$$D = 2 \times 5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = 10 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}$$

A ce stade , deux méthodes s'offrent encore à nous :

$$D = 10 \times \sqrt{3 \times 6} = 10 \times \sqrt{18} = 10 \times \sqrt{9 \times 2} = 10 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 10 \times 3 \times \sqrt{2} = = 30\sqrt{2}$$

ou

$$D = 10 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = 10 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3 \times 2} = 10 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 10 \times (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{2} = 10 \times 3 \times \sqrt{2} = 30 \times \sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

Exercice 3 :

Simplifier les expressions suivantes :

$A = (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})$ $\qquad$ $B = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

$C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ $\qquad$ $D = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

$E = (3\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

Correction :

▷ $A=(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})$

$A=\sqrt{2}\times 2-\sqrt{2}\times\sqrt{2}-1\times 2+1\times\sqrt{2}=$

$A=2\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2-2+\sqrt{2}$ mais $(\sqrt{2})^2=2$

$A=2\sqrt{2}-2-2+\sqrt{2}$

$A=-4+3\sqrt{2}$

$A=-4+3\sqrt{2}$

$A=(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})$

Si nous remplaçons $\sqrt{2}$ par x, nous obtenons l'expression

$A=(x-1)(2-x)$

En développant, nous obtenons :

$A=2x-x^2-2+x$

Comparez avec l'écriture $A=2\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2-2+\sqrt{2}$

Continuons et réduisons notre expression. Nous avons :

$A=-x^2+3x-2$

Remplaçons maintenant x par $\sqrt{2}$ (le contraire de la première étape)

$A=-(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}-2=-2+3\sqrt{2}-2=-4+3\sqrt{2}$

Nous retrouvons le résultat obtenu ci-dessus.

Remarque :

Ne procédez pas ainsi. Il faut comprendre et constater que les méthodes de développement sont identiques à celles utilisées dans le calcul littéral. Ne revenez pas à une écriture littérale. Il faut procéder directement comme ci-dessus avec les racines

▷ $B=(2\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$B=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}\times\sqrt{5}$

$B=2(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{5}\times\sqrt{2}-(\sqrt{5})^2$

Sachant que $(\sqrt{2})^2=2$, que $(\sqrt{5})^2=5$ et que $\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{5}\times\sqrt{2}=\sqrt{10}$, nous avons :

$B=2\times 2+2\sqrt{10}-\sqrt{10}-5=4+2\sqrt{10}-\sqrt{10}-5=-1+\sqrt{10}$

$B=-1+\sqrt{10}$

▷ $C=(\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$C=\sqrt{6}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

$C=\sqrt{18}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

$C=\sqrt{9\times 2}-\sqrt{4\times 3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

$C=\sqrt{9}\times\sqrt{2}-\sqrt{4}\times\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

$C=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$C=\sqrt{2}$

Nous pouvons également écrire (3ème ligne) :

$C=\sqrt{3\times 2}\sqrt{2}-\sqrt{2\times 3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

$C=\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

$C=\sqrt{2}(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}(\sqrt{2})^2+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

$C=\sqrt{2}\times 3-\sqrt{3}\times 2+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

Soit

$C=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

Et donc $C=\sqrt{2}$

▷ $D=(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$

$D=\left[(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2\right]-\left[(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2\right]$

$D=(3+2\sqrt{3}\sqrt{5}+5)-(3-2\sqrt{3}\sqrt{5}+5)$

$D=3+2\sqrt{3}\sqrt{5}+5-3+2\sqrt{3}\sqrt{5}-5$

$D=4\sqrt{3}\sqrt{5}$ ou $D=4\sqrt{3\times 5}=4\sqrt{15}$

$D=4\sqrt{15}$

▷ $E=(3\sqrt{2}-1)^2-(2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

$E=[(3\sqrt{2})^2-2\times 3\sqrt{2}\times 1+1^2]-[2(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1]$

$E=[3^2(\sqrt{2})^2-6\sqrt{2}+1]-[2\times 2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1]$

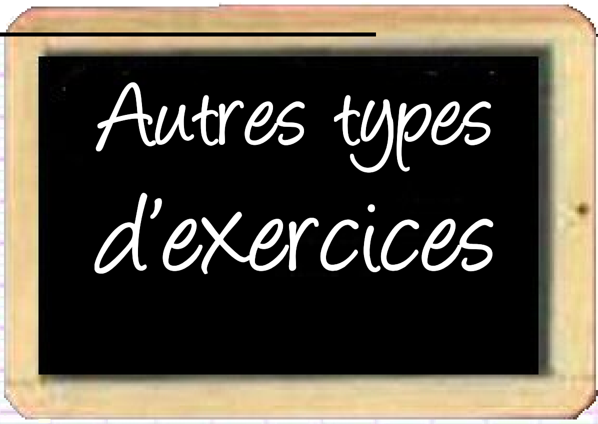
$E=[9\times 2-6\sqrt{2}+1]-[4-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1]$

$E=[18-6\sqrt{2}+1]-[4-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1]$

$E=18-6\sqrt{2}+1-4+2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1$

$E=16-5\sqrt{2}$

$E=16-5\sqrt{2}$



Exercice 4 :

On donne les nombres :

$a=2\sqrt{5}-3$ et $b=2\sqrt{5}+3$

Calculer $a+b$, $a-b$, a^2+b^2 , ab et $(a+b)^2$

Correction :

⇨ Attention aux parenthèses

▷ Calcul de a + b :

Remplaçons a et b par les valeurs données ci-dessus. Les différentes valeurs sont entre parenthèses .

$a+b=(2\sqrt{5}-3)+(2\sqrt{5}+3)$

$a+b=2\sqrt{5}-3+2\sqrt{5}+3=4\sqrt{5}$

$a+b=4\sqrt{5}$

▷ Calcul de a - b :

$a-b=(2\sqrt{5}-3)-(2\sqrt{5}+3)$

$a-b=2\sqrt{5}-3-2\sqrt{5}-3=-6$

$a-b=-6$

▷ Calcul de a^2+b^2 :

$a^2+b^2=(2\sqrt{5}-3)^2+(2\sqrt{5}+3)^2$

$a^2+b^2=[(2\sqrt{5})^2-12\sqrt{5}+3^2]+[(2\sqrt{5})^2+12\sqrt{5}+3^2]$

$a^2+b^2=[2^2(\sqrt{5})^2-12\sqrt{5}+9]+[2^2(\sqrt{5})^2+12\sqrt{5}+9]$

$a^2+b^2=[4\times 5-12\sqrt{5}+9]+[4\times 5+12\sqrt{5}+9]$

$a^2+b^2=[20-12\sqrt{5}+9]+[20+12\sqrt{5}+9]$

$a^2+b^2=[29-12\sqrt{5}]+[29+12\sqrt{5}]=29-12\sqrt{5}+29+12\sqrt{5}=58$

$a^2+b^2=20-12\sqrt{5}+9+20+12\sqrt{5}+9=20+9+20+9=58$

$a^2+b^2=58$

▷ Calcul de ab :

$ab=a\times b=(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3)$

$ab=(2\sqrt{5})^2-3^2=2^2(\sqrt{5})^2-3^2=4\times 5-9=20-9=11$

$ab=11$

▷ Calcul de (a + b)² :

$(a+b)^2 = [(2\sqrt{5}-3)+(2\sqrt{5}+3)]^2$

$(a+b)^2 = [2\sqrt{5}-3+2\sqrt{5}+3]^2$

$(a+b)^2 = [4\sqrt{5}]^2$

$(a+b)^2 = 4^2(\sqrt{5})^2 = 16\times 5 = 80$ $\qquad$ $(a+b)^2 = 80$

Exercice 5 : d'après Brevet des Collèges - Poitiers - 1990

Prouver que $\sqrt{8}\times\sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$ est un nombre entier . (le symbole "x" est le symbole de la multiplication)

Correction :

$\sqrt{8}\times\sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ (d'après la propriété $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ qui doit également se lire $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$)

L'expression à calculer est donc égale à (nous appellerons A cette expression) :

$A = \sqrt{8\times 2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$

$A = \sqrt{16} - 2\sqrt{25\times 3} + 5\sqrt{4\times 3}$

$A = 4 - 2\sqrt{25}\times\sqrt{3} + 5\sqrt{4}\times\sqrt{3}$

$A = 4 - 2\times 5\times\sqrt{3} + 5\times 2\times\sqrt{3}$

$A = 4 - 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 4$ $\qquad$ A = 4 donc A est un entier

Remarque :

Le premier terme pouvait également être simplifié comme suit :

$\sqrt{8}\times\sqrt{2} = \sqrt{4\times 2}\times\sqrt{2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2\times(\sqrt{2})^2 = 2\times 2 = 4$

Exercice 6 :

Les côtés d'un triangle IJK ont pour longueurs :

$IJ = 2\sqrt{3} + 3$ $\qquad$ $IK = 3\sqrt{3} - 2$ $\qquad$ et $\qquad$ $JK = 2\sqrt{13}$

Démontrer que le triangle IJK est rectangle.

Correction :

Recherche du plus grand côté :

A l'aide de la calculatrice , nous constatons que :

$IJ = 2\sqrt{3} + 3 \approx 6{,}46$ $\qquad$ IK $3\sqrt{3} - 2 \approx 3{,}19$ $\qquad$ et $\qquad$ $JK = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$

Par conséquent , si le triangle IJK est rectangle , il ne peut être rectangle qu'en I.

Le triangle IJK est-il rectangle en I ?

Nous avons (calculs séparés) :

- $JK^2 = (2\sqrt{13})^2 = 2^2\times(\sqrt{13})^2 = 4\times 13 = 52$
- $IJ^2 + IK^2 = (2\sqrt{3}+3)^2 + (3\sqrt{3}-2)^2$

  $IJ^2 + IK^2 = [(2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 3^2] + [(3\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 2^2]$

  $IJ^2 + IK^2 = [2^2(\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 9] + [3^2(\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 4]$

  $IJ^2 + IK^2 = [4\times 3 + 12\sqrt{3} + 9] + [9\times 3 - 12\sqrt{3} + 4]$

$$IJ^2 + IK^2 = [12+12\sqrt{3}+9]+[27-12\sqrt{3}+4]$$

Continuons le calcul dans chaque parenthèse ou supprimons les :

$$IJ^2 + IK^2 = 12+12\sqrt{3}+9+27-12\sqrt{3}+4 = 12+9+27+4 = 52$$

Ces deux calculs permettent d'écrire que :

$$JK^2 = IJ^2 + IK^2$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I

Exercice 7 : Brevet des Collèges - Caen - 1994

Soit l'expression $C = x^2 - 6x + 7$

Calculer C pour $x = \sqrt{5}$ (Ecrire le résultat sous la forme $a+b\sqrt{5}$)

Calculer C pour $x = 3+\sqrt{2}$

Correction :

▷ Calcul de C pour $x = \sqrt{5}$:

Nous avons :

$C = (\sqrt{5})^2 - 6\times\sqrt{5}+7$

$C = 5-6\sqrt{5}+7 = 12-6\sqrt{5}$

$C = 12-6\sqrt{5}$

▷ Calcul de C pour $x = 3+\sqrt{2}$:

Nous avons :

$C = (3+\sqrt{2})^2 - 6(3+\sqrt{2})+7$

$C = [3^2+2\times3\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2]-6(3+\sqrt{2})+7$

$C = [9+6\sqrt{2}+2]-6(3+\sqrt{2})+7$

$C = 9+6\sqrt{2}+2-18-6\sqrt{2}+7 = 0$

$C = 0$

Exercice 8 : Brevet des Collèges - Nice - Montpellier - Toulouse - 1991

Développer et écrire le plus simplement possible :

$D = (4+5\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}+3)(3\sqrt{2}+7)$

Correction :

$D = (4+5\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}+3)(3\sqrt{2}+7)$

$D = [4^2+40\sqrt{2}+(5\sqrt{2})^2]+(6(\sqrt{2})^2+14\sqrt{2}+9\sqrt{2}+21)$

$D = [16+40\sqrt{2}+5^2\times(\sqrt{2})^2]+(6\times2+14\sqrt{2}+9\sqrt{2}+21)$

$D = [16+40\sqrt{2}+25\times2]+(12+14\sqrt{2}+9\sqrt{2}+21)$

$D = [16+40\sqrt{2}+50]+(12+14\sqrt{2}+9\sqrt{2}+21)$

$D = 16+40\sqrt{2}+50+12+14\sqrt{2}+9\sqrt{2}+21$

$D = 16+50+12+21+40\sqrt{2}+14\sqrt{2}+9\sqrt{2} = 99+63\sqrt{2}$

$D = 99+63\sqrt{2}$