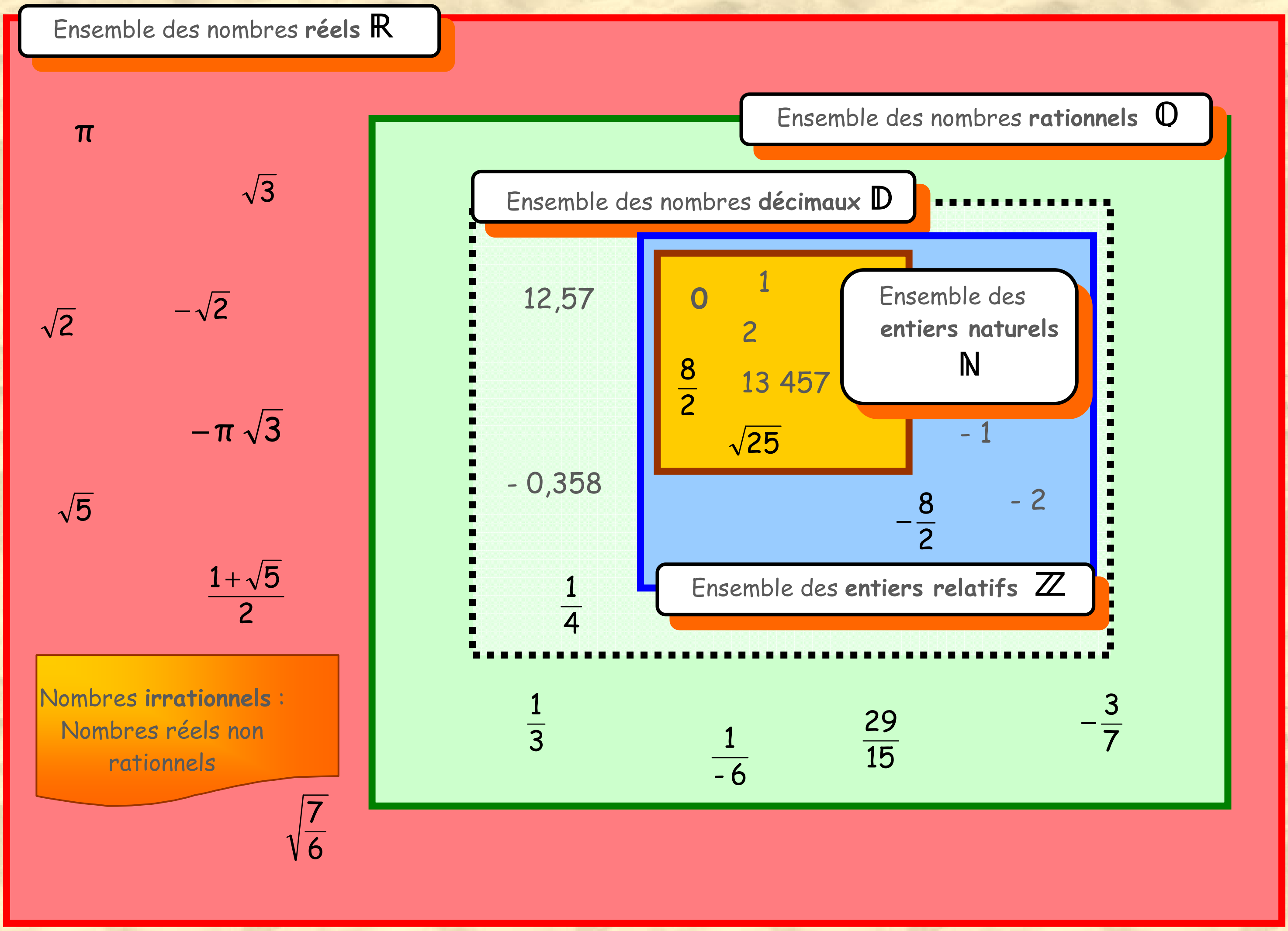
THEME 8

RATIONNELS ET IRRATIONNELS
IRRATIONALITE DE $\sqrt{2}$

RATIONNELS – IRRATIONNELS



Un nombre <u>rationnel</u> est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs.

Un nombre rationnel peut donc s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$.

Il existe une infinité de façons d'écrire un même nombre rationnel. Par exemple :

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{-8}{-12}=\frac{2000}{3000}=\ldots$$

Une écriture est privilégiée. L'écriture est celle d'une fraction simplifiée appelée <u>fraction irréductible</u> (le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux). Tout nombre rationnel non nul possède exactement une seule forme de ce type avec un dénominateur positif. (Si le dénominateur est égal à 1, ce nombre s'appelle un entier et son écriture se limite à l'écriture du numérateur .)

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels. Ces nombres sont appelés des <u>irrationnels.</u>

$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{\pi - 1}, \dfrac{\sqrt{5}}{2{,}7} \dots$ sont des irrationnels.

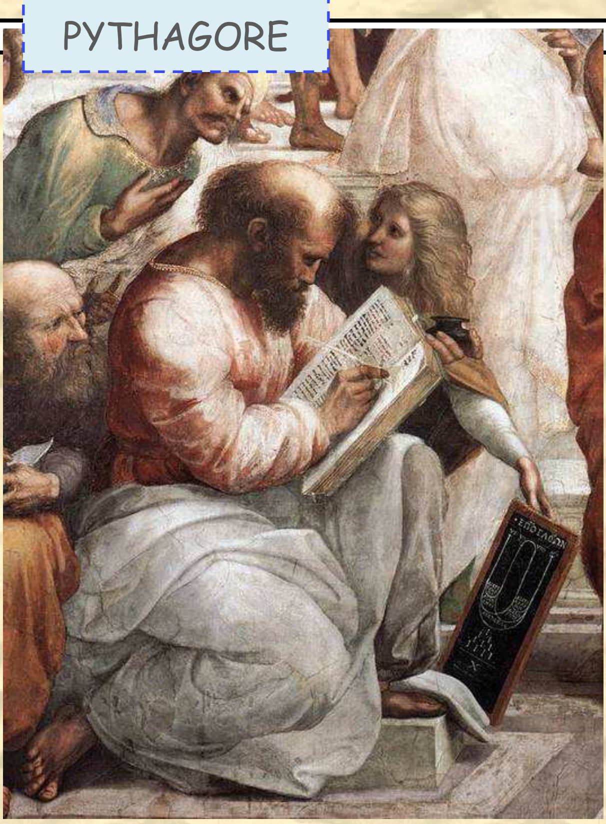
Rationnel *(adjectif)*
Qui est conforme à la raison, à la logique, au bon sens.
Censé, judicieux, raisonnable.
Qui raisonne avec justesse (esprit rationnel)
Qui appartient à la raison, qui relève de la raison.
Irrationnel *(adjectif)*
Qui n'est pas rationnel, qui n'est pas conforme à la raison (anormal, fou etc.)

(Cf. THEME : Ensemble de nombres)

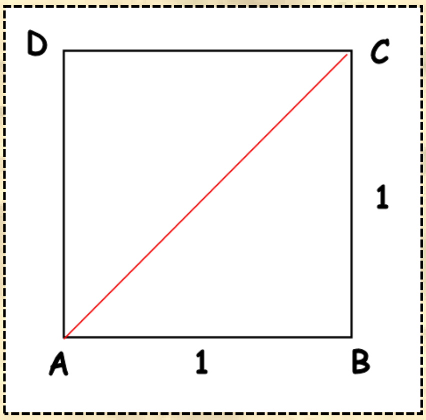
► $\sqrt{2}$ EST UN IRRATIONNEL !!!

Tout est nombre. C'était la devise de la « secte » Fraternité dirigée par Pythagore. Par nombre, il faut entendre nombre entier ou nombre rationnel (Une fraction s'écrit avec deux nombres entiers). C'est tout d'abord dans la musique qu'il mit en évidence des rapports numériques.
Pour Pythagore et ses disciples, tous les nombres existants dans la nature étaient des nombres rationnels.
Et c'est dans une figure pourtant familière qu'il découvrit l'existence d'un nombre que la raison ne pouvait pas accepter. C'est le nombre $\sqrt{2}$. Cette découverte qui devait rester secrète, fut divulguée par un de ses disciples Hippase de Métaponte (Il périt bizarrement dans un naufrage). Toute l'idée maitresse de la secte était remise en question. Ce fut la première révolution dans les Mathématiques.

PYTHAGORE



► Calculer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1



Solution :

Dans le triangle ABC rectangle en B ,
D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Soit

$AC^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

Donc

$AC = \sqrt{2}$

La diagonale d'un carré de côté 1 a une longueur égale à $\sqrt{2}$.
Cette valeur est-elle rationnelle ou irrationnelle ?

Etudier la **parité** d'un nombre (entier) , c'est déterminer si cet entier est pair ou impair.

Question préliminaire :

▷ Quelle est la parité du carré d'un nombre entier pair ?
Par exemple

$2^2 = 4$ (résultat pair)
$6^2 = 36$ (résultat pair)
$12^2 = 144$ (résultat pair)

En-est-il toujours ainsi ? (Cf. THEME : Nombre pair – Nombre impair)

Propriété :
Un nombre entier élevé au carré conserve sa parité.

▶ Carré d'un nombre pair :

Considérons un nombre entier pair. Ce nombre peut s'écrire 2n
Nous avons :

$$(2n)^2 = 2^2 \times n^2 = 4 n^2 = 2 \times (2 n^2)$$

Ce résultat est de la forme 2 x ☐ , (multiple de 2) , donc le carré reste pair.

▶ Carré d'un nombre impair :

Considérons un nombre entier impair. Ce nombre peut s'écrire 2n + 1
Nous avons :

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2 (2n^2 + 2n) + 1$$

Ce résultat est de la forme 2 x ☐ + 1 , donc le carré reste impair.

▶ Par conséquent,si le carré d'un nombre entier est pair, alors ce nombre est pair.

▶ $\sqrt{2}$ est-il rationnel ou irrationnel ?

La démonstration suivante est une démonstration par l'absurde.
Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Il existe donc deux nombres p et q tels que : $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Cette fraction peut-être choisie irréductible, c'est-à-dire que nous pouvons choisir p et q premiers entre eux (avec comme seul diviseur commun le nombre 1)
$\sqrt{2}$ est le nombre qui, élevé au carré, donne 2 (définition de la racine carrée d'un nombre positif)

Donc $(\frac{p}{q})^2 = 2$

Soit $\frac{p^2}{q^2} = 2$

$p^2 = 2 q^2$ (égalité 1)

p^2 est du type 2 x ☐ , donc p^2 est un nombre pair.
D'après le résultat de la question préliminaire ci-dessus, nous pouvons en conclure que le nombre p est un nombre pair (Si le carré d'un nombre entier est pair, alors ce nombre est pair)
Par suite, comme p est un nombre pair, p peut s'écrire :

$p = 2 r$

Remplaçons cette nouvelle écriture de p dans l'égalité (1)

$$(2r)^2 = 2q^2$$

Par suite $2^2 r^2 = 2q^2$

$$4r^2 = 2q^2$$

Simplifions par 2 les deux membres de cette égalité. Nous avons :

$$2 \times 2r^2 = 2q^2$$

Soit $2r^2 = q^2$

Comme précédemment, cette écriture permet d'affirmer que q^2 est pair (de la forme $2 \times \square$) et par suite que le nombre q est un nombre pair (Si le carré d'un nombre entier est pair, alors ce nombre est pair)

Conclusion :

Le nombre p est un nombre pair et le nombre q est un nombre pair, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse : p et q sont premiers entre eux.

Il n'existe pas de rationnels positifs dont le carré est 2, donc $\sqrt{2}$ est un irrationnel

La démonstration que nous venons de faire est un nouveau type de démonstration dite démonstration par l'absurde.

Dans une démonstration par l'absurde, lorsque nous voulons démontrer une propriété, il suffit de démontrer que : affirmer le contraire (la négation) de la proposition conduit à une contradiction.

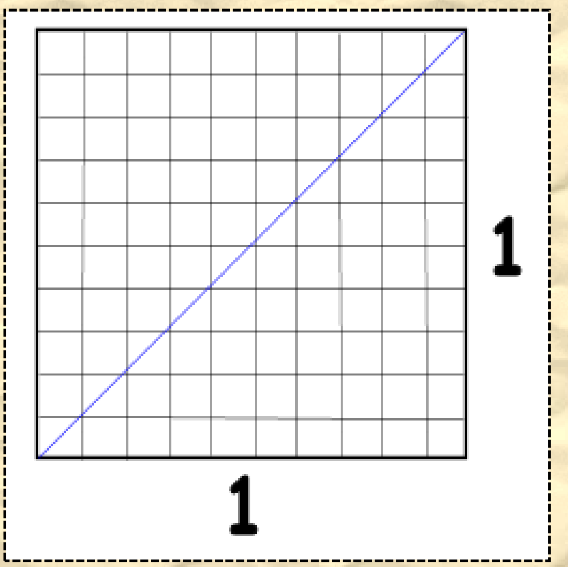
Par exemple, si nous désirons montrer qu'une propriété est fausse, le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que cette propriété est vraie et à aboutir à une contradiction.

Exemple :

Dans l'ensemble des entiers naturels, existe-t-il un nombre supérieur à tous les autres ?

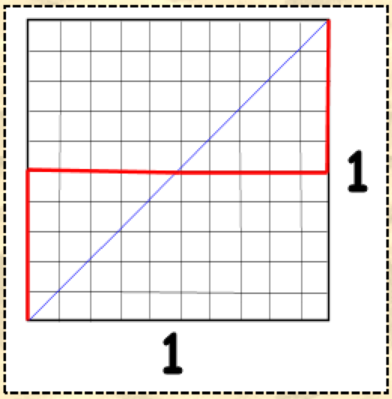
Supposons que oui et appelons N le nombre supérieur à tous les autres.
Le nombre N + 1 est un nombre entier supérieur à N, ce qui est en contradiction avec la supposition faite ci-dessus. Donc notre supposition est fausse et son contraire (sa négation) est vraie . Donc il n'existe pas d'entier supérieur à tous les autres !

▶ BIZARRE !!!

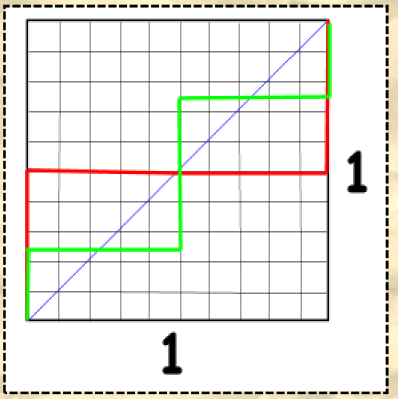


Considérons un carré de côté 1.

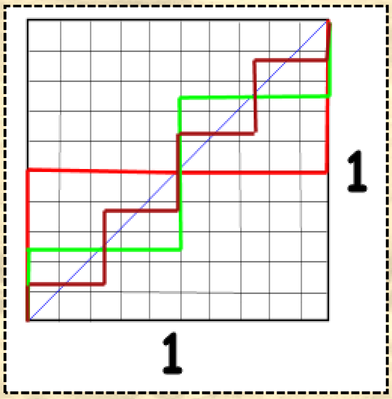
Nous avons démontré que la longueur de la diagonale est $\sqrt{2}$ (segment bleu)



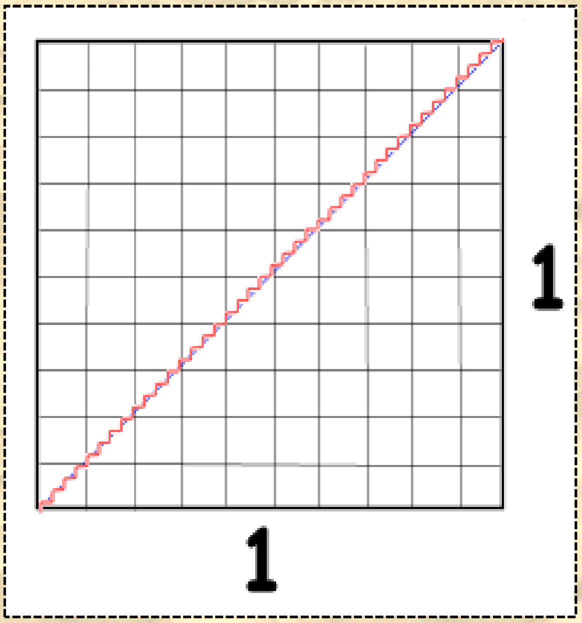
La ligne rouge (nouvelle ligne) mesure 0,5 + 1 + 0,5 , soit 2



La ligne verte (nouvelle ligne) mesure 0,25 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,25 , soit 2



La ligne marron (nouvelle ligne) mesure également 2
(Tous les segments « horizontaux » mis « bout à bout » mesurent 1 et de même pour les segments « verticaux »)



Si nous continuons ainsi, la ligne brisée se « rapproche » de la diagonale pour se « confondre » avec elle lorsque le nombre de « marches » devient de plus en plus grand (infini)

Par conséquent, les longueurs de ces deux lignes (diagonale et ligne brisée) sont identiques !

Donc $\sqrt{2} = 2$

C'est bien sûr faux

$\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,698\,078\,569\,671\,875$

A SUIVRE