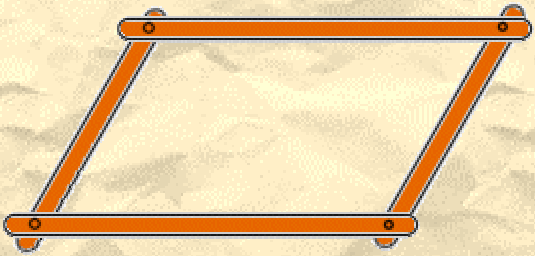
THEME 8

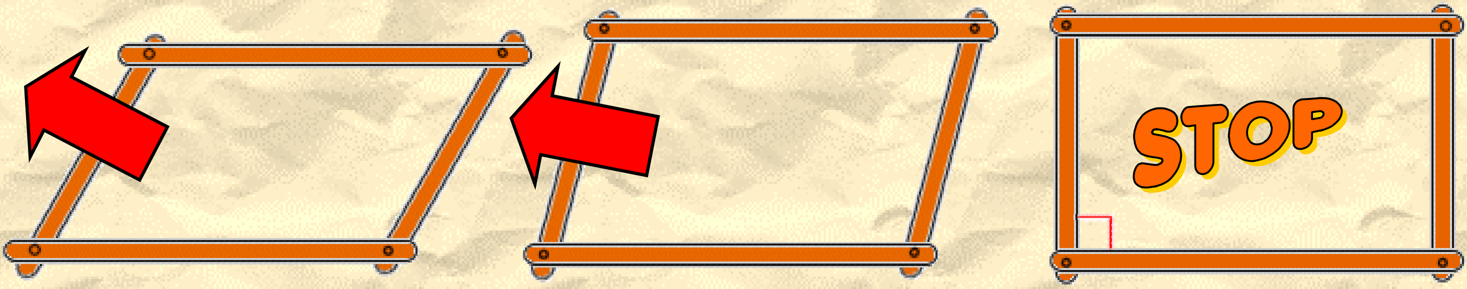
PARALLELOGRAMMES PARTICULIERS
RECTANGLE - LOSANGE - CARRE

▶ Le rectangle :

Considérons un jouet d'enfant constitué de 4 pièces métalliques (ou en bois) ; deux ont même longueur et les deux autres ont également même longueur.
En les assemblant comme indiqué sur la figure ci-contre, nous obtenons un quadrilatère. Ce quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur, donc ce quadrilatère est un parallélogramme (Cf. les propriétés du parallélogramme)



Comment obtenir un rectangle ?
Il suffit de « redresser » un côté de ce parallélogramme afin d'obtenir un angle droit.



> *Définition :*
> Un rectangle est un parallélogramme qui possède un angle droit.

Propriétés du rectangle :

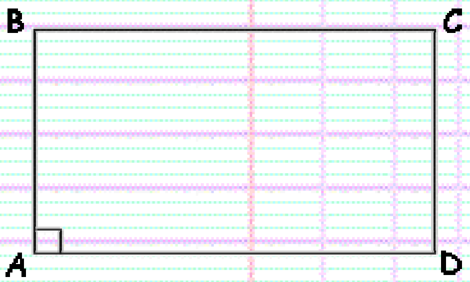
Un rectangle est, d'après la définition, un parallélogramme particulier. Par conséquent, un rectangle a toutes <u>les propriétés du parallélogramme</u>.

- ▶ Les côtés opposés sont parallèles.
- ▶ Les côtés opposés ont même longueur.
- ▶ Les diagonales ont même milieu
- ▶ Les angles opposés ont même mesure. (et les angles consécutifs sont supplémentaires).

Autres propriétés propres au rectangle :

Considérons un rectangle ABCD . Nous savons que ce rectangle a un angle droit (par exemple, l'angle $\widehat{BAD}$).

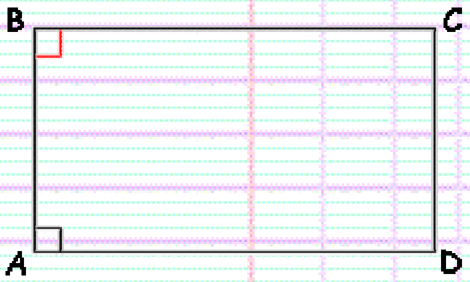
Rappelons une propriété établie en classe de Sixième : Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre .



Dans le rectangle ABCD,

▷ Les droites (AD) et (BC) sont parallèles (Un rectangle a des côtés opposés parallèles, puisqu'un rectangle est un parallélogramme.)

▷ La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AD) (L'angle $\widehat{BAD}$ est un angle droit)



Donc d'après la propriété énoncée ci-dessus,

la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (BC)

et par suite, <u>l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle droit</u> .

Remarque :

Il était également possible d'utiliser le fait que, dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires.

Nous pouvons réutiliser cette démarche (utilisation de la propriété établie en Sixième) pour démontrer que l'angle $\widehat{BCD}$ est également un angle droit , puis recommencer pour démontrer que l'angle $\widehat{CDA}$ est également un angle droit.

<u>Autre façon de démontrer que les deux autres angles sont droits :</u>

Le rectangle étant un parallélogramme (particulier), les angles opposés ont même mesure.

Les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BAD}$ sont, dans la quadrilatère ABCD, des angles opposés ,

donc : $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 90°$, donc $\widehat{BCD}$ est un angle droit

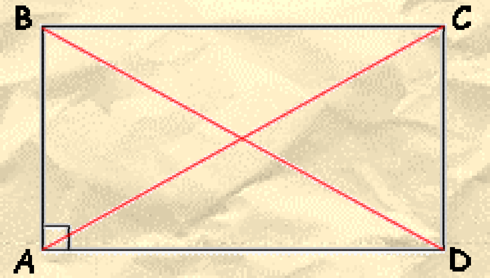
De même $\widehat{CDA}$ et $\widehat{ABC}$ sont, dans la quadrilatère ABCD, des angles opposés ,

donc $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 90°$, donc $\widehat{CDA}$ est un angle droit .

Propriété :

Dans un rectangle, les quatre angles sont droits .

Autre propriété :



Dans un parallélogramme, les diagonales ont même milieu, appelé le <u>centre</u> du parallélogramme. Cette propriété est donc vérifiée pour le rectangle.

Nous constatons (sans démonstration) que les diagonales ont également même longueur.

AC = BD

Propriété :

Dans un rectangle, les diagonales ont même mesure .

Remarque :

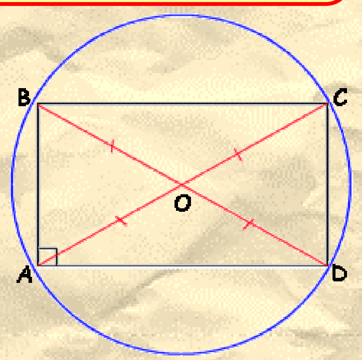
Comme les diagonales ont même milieu et ont même longueur , nous avons :

OA = OB = OC = OD

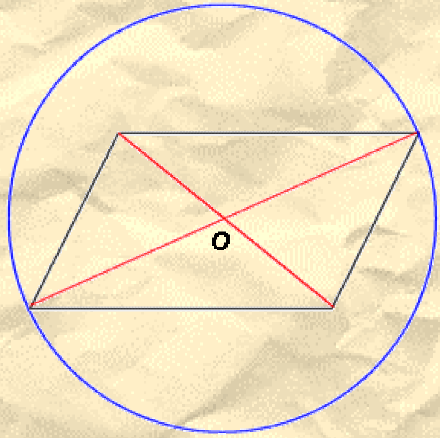
Il existe donc un cercle de centre O et de rayon cette valeur commune (OA ou OB ou OC ou OD) qui passe par les quatre sommets du rectangle.

Ce cercle s'appelle le cercle circonscrit au rectangle.

A noter que ce cercle est le plus petit cercle qui contienne le rectangle.

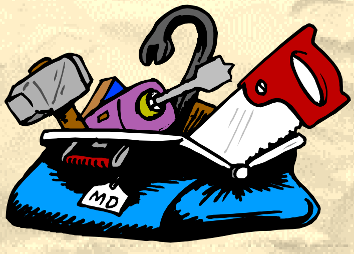


Remarque :
Un parallélogramme non rectangle n'a pas de cercle circonscrit.



Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?

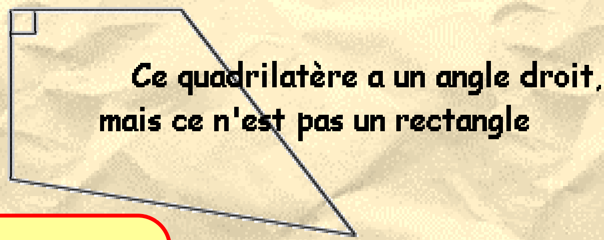
Nous disposons de trois méthodes
(trois outils)



Méthode 1 : (utilisation de la définition)

Il suffit de démontrer que :
- le quadrilatère est un parallélogramme .
- le quadrilatère a un angle droit .

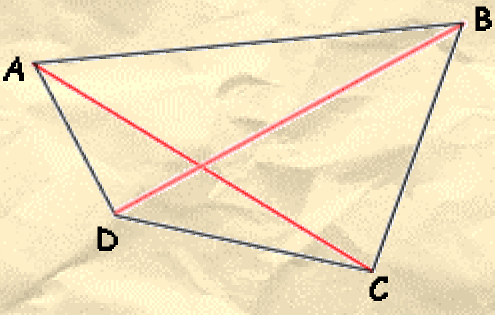
ⓘ Attention , il est nécessaire de démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme. Démontrer uniquement que le quadrilatère a un angle droit ne suffit pas.



Méthode 2 : (propriété des diagonales)

Il suffit de démontrer que :
- le quadrilatère est un parallélogramme .
- le quadrilatère a des diagonales de même longueur.

ⓘ Attention , il est nécessaire de démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme. Démontrer uniquement que le quadrilatère a des diagonales de même longueur ne suffit pas.



AC = BD
mais ce quadrilatère n'est pas un rectangle.

▶ Faut-il donc nécessairement démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme pour démontrer que cette figure est un rectangle ?

Il existe une méthode qui évite de « passer » par le parallélogramme.

Méthode 3 :

Il suffit de démontrer que le quadrilatère a 3 angles droits

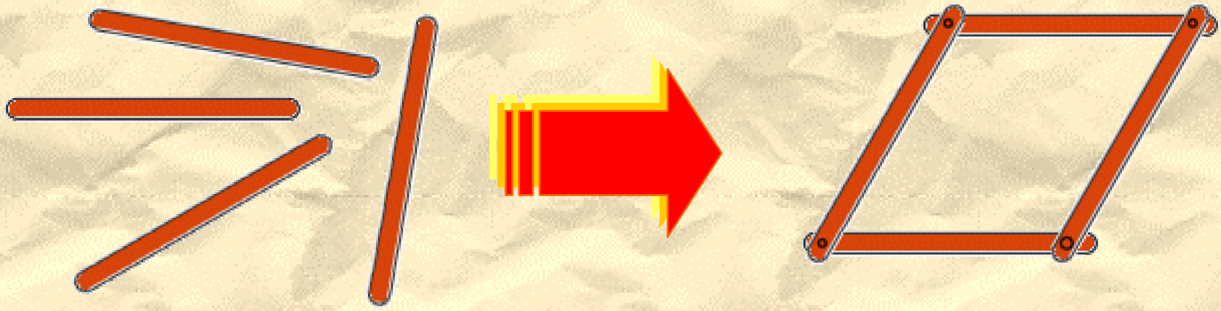
Le quatrième (et dernier) angle est droit
3 angles droits suffisent à définir un rectangle

Remarque :
Il est inutile de démontrer qu'il y a quatre angles droits, trois suffisent.

▶ Le losange :

Définition :

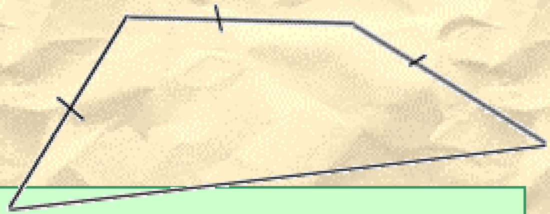
Un losange est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur.



Pour démontrer qu'un quadrilatère est un losange, le seul outil dont nous disposons est de prouver que les quatre côtés ont même mesure. Existe-t-il d'autres méthodes ?

▷ Suffit-il d'avoir trois côtés de même longueur ?

Il suffit de montrer qu'une figure qui a trois côtés de même longueur n'est pas un losange en utilisant un contre-exemple.



▷ *Tous les nombres (entiers) se terminant par 5 sont divisibles par 5 .*

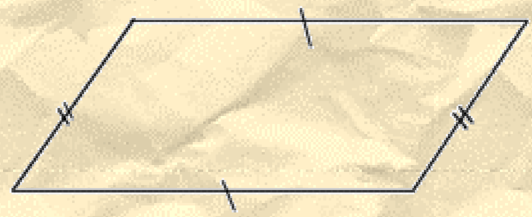
Cette phrase est-elle vraie ? Il semble que oui, mais, encore faut-il le prouver. La preuve, c'est à dire la démonstration, n'est pas nécessairement facile.

▷ *Tous les nombres (entiers) se terminant par 3 sont divisibles par 3 .*

Cette phrase est-elle vraie ? Le nombre 13 se termine par 3 , mais n'est pas divisible par 3. La phrase précédente est donc fausse.

Un exemple n'est pas une preuve, mais un <u>contre-exemple</u> est une preuve qui permet d'affirmer qu'une phrase est fausse.

▷ Suffit-il d'avoir deux côtés de même longueur ?



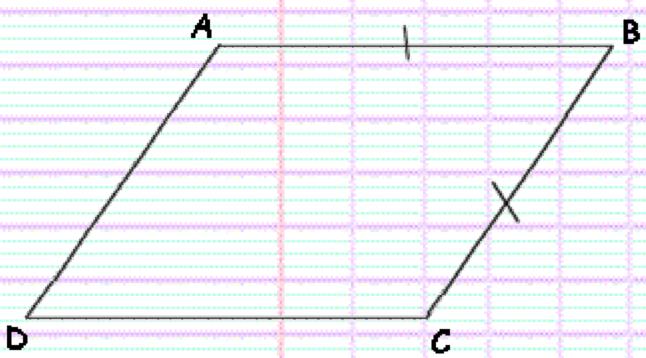
Tout parallélogramme a deux côtés de même mesure (dans un parallélogramme, les côtés opposés ont même mesure).

Donc, deux côtés de même longueur ne permettent pas de définir un losange.

Par contre :

Propriété :

Un parallélogramme qui a deux côtés <u>consécutifs</u> de même longueur est un losange .



Considérons un parallélogramme ABCD tel que AB = BC.

Un parallélogramme a des côtés opposés de même longueur,
donc AB = CD et BC = AD
Comme AB = BC , alors
AB = BC = AD = CD
Les quatre côtés ont même longueur, donc le quadrilatère ABCD est un losange.

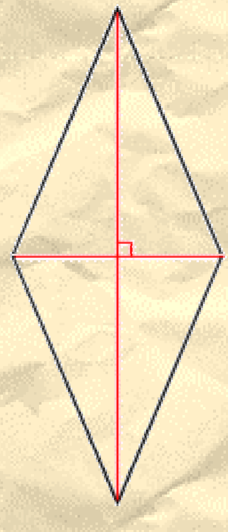
Propriétés du losange :

Un losange est, d'après la propriété précédente, un parallélogramme particulier. Par conséquent, un losange a toutes les propriétés du parallélogramme.

- Les côtés opposés sont parallèles.
- Les côtés opposés ont même longueur.
- Les diagonales ont même milieu
- Les angles opposés ont même mesure. (et les angles consécutifs sont supplémentaires).

Autres propriétés propres au losange :

- Les quatre côtés ont même longueur.



Les diagonales, comme dans tout parallélogramme, ont même milieu.
Elles ne sont pas de même longueur, comme dans le rectangle .
Par contre, nous constatons (sans démonstration) que les diagonales sont perpendiculaires.

Propriété :
Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires .

Propriété :
Les diagonales d'un losange sont des axes de symétrie .

Remarque :
Un losange a donc **un centre de symétrie** (le point de rencontre des diagonales) et **deux axes de symétrie** (les diagonales).
Ces deux axes sont les bissectrices des angles du losange.

Comment démontrer qu'un quadrilatère est un losange ?

Nous disposons de trois méthodes
(trois outils)

Méthode 1 : (concernant les côtés)
Il suffit de démontrer que :

- le quadrilatère est un parallélogramme .
- le quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur .

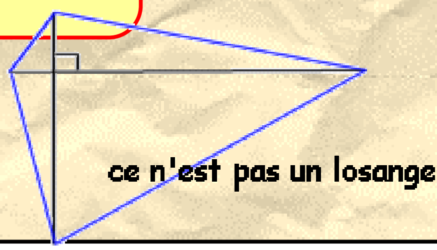
ⓘ Attention , il est nécessaire de démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme. Démontrer uniquement que le quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur ne suffit pas.

ⓘ Attention , les deux côtés de même mesure doivent être consécutifs (qui se suivent)

Méthode 2 : (concernant les diagonales)
Il suffit de démontrer que :

- le quadrilatère est un parallélogramme .
- le quadrilatère a des diagonales perpendiculaires .

ⓘ Attention , il est nécessaire de démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme. Démontrer uniquement que le quadrilatère a des diagonales perpendiculaires ne suffit pas.

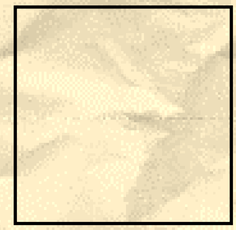


Méthode 3 : Il suffit de démontrer que :

▶ le quadrilatère a 4 côtés de même longueur .

▶ Le carré :

Un carré est un rectangle particulier (donc un parallélogramme particulier). C'est un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur.
Mais un carré est également un losange particulier. C'est un losange qui a un angle droit.



Définition :
Un carré est un quadrilatère qui est à la fois rectangle et losange .

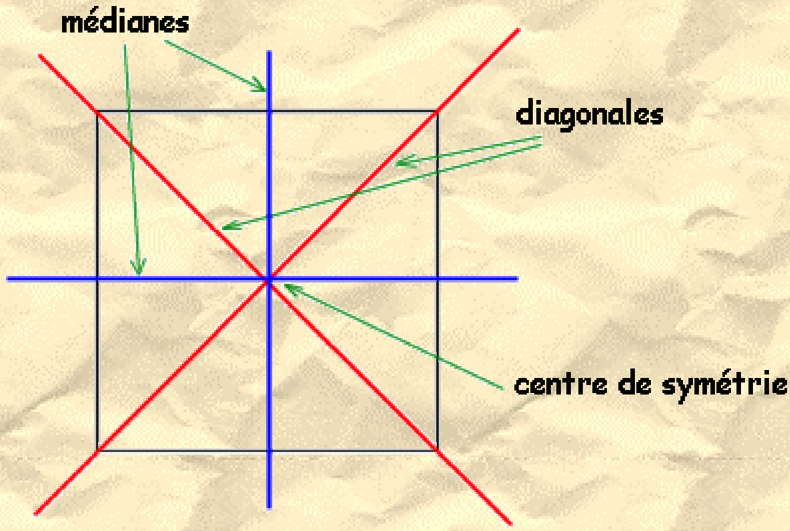
Propriétés du carré :

Un carré est, d'après la propriété précédente, un rectangle particulier et un losange particulier. Par conséquent, un carré a toutes les propriétés du rectangle et toutes les propriétés du rectangle

- ▶ Les côtés opposés sont parallèles. (propriété du parallélogramme)
- ▶ Les côtés opposés ont même longueur. (propriété du parallélogramme)
- ▶ Les quatre côtés ont même longueur. (propriété du losange)
- ▶ Les quatre angles sont droits. (propriété du rectangle)
- ▶ Les diagonales ont même milieu. (propriété du parallélogramme)
- ▶ Les diagonales ont même longueur. (propriété du rectangle)
- ▶ Les diagonales sont perpendiculaires. (propriété du losange)

Axes de symétrie et centre de symétrie :

Le carré a un centre de symétrie (le point de rencontre des diagonales) et quatre axes de symétrie



Comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?

Méthode :
Il suffit de démontrer que :

▶ le quadrilatère est un rectangle.
▶ le quadrilatère est un losange.

Dans la rédaction devront figurer, après démonstration, les phrases :

▶ ??????? (démonstration)

Le quadrilatère ABCD est un **rectangle.**

▶ ??????? (démonstration)

Le quadrilatère ABCD est un **losange.**

▶ Le quadrilatère ABCD étant à la fois un rectangle et un losange, le quadrilatère ABCD est un **carré.**

RESUME :

COMMENT DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN RECTANGLE ?

Méthode 1 : (Propriété concernant les côtés.)

Il suffit de démontrer que le quadrilatère

- ☞ est un parallélogramme.
- ☞ a un angle droit (c'est à dire deux côtés perpendiculaires).

Méthode 2 : (Propriété concernant les diagonales.)

Il suffit de démontrer que le quadrilatère

- ☞ est un parallélogramme.
- ☞ a des diagonales de même longueur.

Méthode 3 : (Cette méthode permet de ne pas démontrer que la figure est un parallélogramme.)

Il suffit de démontrer que le quadrilatère possède trois angles droits.

COMMENT DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN LOSANGE ?

Méthode 1 : (Propriété concernant les côtés.)

Il suffit de démontrer que le quadrilatère

- ☞ est un parallélogramme.
- ☞ a deux côtés consécutifs de même longueur.

Méthode 2 : (Propriété concernant les diagonales.)

Il suffit de démontrer que le quadrilatère

- ☞ est un parallélogramme.
- ☞ a des diagonales perpendiculaires.

Méthode 3 : (Cette méthode permet de ne pas démontrer que la figure est un parallélogramme.)

Il suffit de démontrer que le quadrilatère a quatre côtés de même longueur.

COMMENT DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN CARRE ?

Méthode :

Il suffit de démontrer que le quadrilatère

☞ est un rectangle.

☞ est un losange.

NOTATIONS EN GEOMETRIE : (RAPPELS)

Notation d'une droite	:	(AB)
Notation d'un segment	:	[AB]
Notation d'une demi-droite	:	[Ax) ou [AB)
Notation de la longueur d'un segment	:	AB

Remarque :

Dans les notations d'une droite, d'une demi-droite ou d'un segment, le crochet « [» (ou «] ») indique une extrémité (que l'on ne franchit pas) et la parenthèse « (» ou «) » indique une orientation (l'extrémité est franchissable).