# THEME 8

# SPHERE ET BOULE

## Définitions et vocabulaire :

Soit O un point et r un nombre positif.

▶ La sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à la distance r du point O.

ou

La sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient :

$$OM = r$$

▶ La boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à r du point O.

ou

La boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient :

$$OM \leq r$$

### Remarque :

Ces deux définitions sont à comparer avec les définitions du cercle et du disque :

Soit O un point et r un nombre positif.

▶ **Le cercle** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M **du plan** qui vérifient : $OM = r$

▶ **Le disque** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M **du plan** qui vérifient : $OM \leq r$

### Remarque :

La boule est « l'intérieur » de la sphère, la sphère n'étant que l'enveloppe.

Il existe deux définitions de la boule :

▷ La boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $OM \leq r$.
Cette boule est appelée **boule fermée**. Cette boule est constituée de l'intérieur et de l'enveloppe.
C'est la définition utilisée à votre niveau.

▷ La boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $OM < r$.
Cette boule est appelée **boule ouverte**. Cette boule n'est constituée que de l'intérieur sans l'enveloppe.

### Vocabulaire :

Le point O s'appelle le **centre** de la sphère ( ou de la boule ).

Le **rayon** est à la fois un segment et la mesure r de ce segment.

Attention à la perspective du dessin . Les trois rayons [OM], [OP] et [OQ] ont même mesure r.

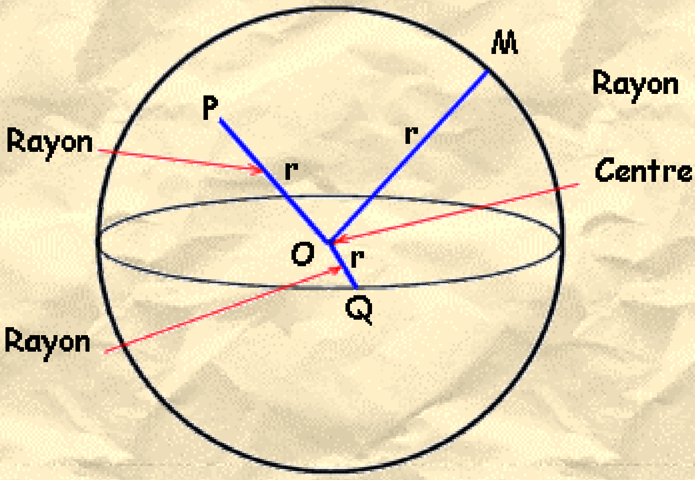
$$OM = OP = OQ = r$$

Deux points A et B d'une sphère sont **diamétralement opposés** lorsque ces points sont alignés avec le centre O. Le segment [AB] s'appelle alors un **diamètre** et sa mesure égale à 2 x r s'appelle également le diamètre.

Toute **sécante diamétrale** ( droite passant par le centre O de la sphère ou de la boule ) est <u>axe de symétrie .</u>

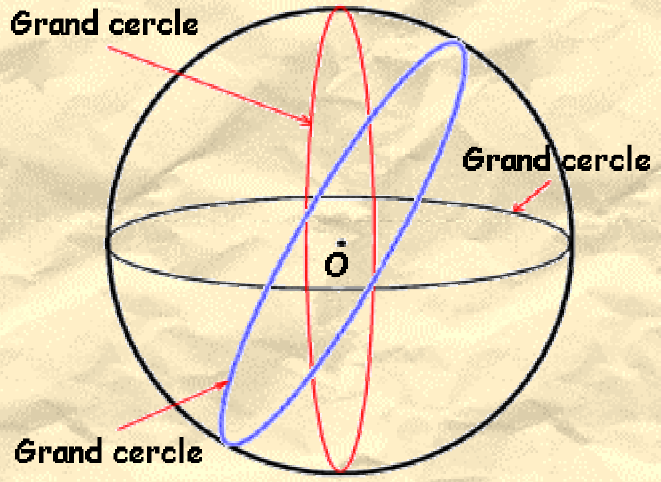
Une sphère est un **solide de révolution** engendré par la rotation d'un demi-cercle de centre O et de rayon celui de la sphère autour d'une sécante diamétrale.

Une boule est, elle, engendrée par un demi-disque tournant autour d'une sécante diamétrale.




Un **grand cercle** d'une sphère de centre O et de rayon r est un cercle de centre O et de rayon r .

En considérant la Terre comme une sphère ( boule ), l'équateur est un grand cercle.




*Remarque :*

Une sphère n'a pas de développement ( patron ).

## <u>*Aire et volume :*</u> ( r est le rayon )

Aire de la sphère : $4\,\pi\, r^2$

Volume de la boule : $\dfrac{4}{3}\pi\, r^3 = \dfrac{4\,\pi\, r^3}{3}$

*Exemples :*

▶ Calculez l'aire d'un ballon de football de diamètre 22 cm.

ⓘ Le seule « piège » dans ce type d'exercice est la donnée du diamètre et non du rayon !

### Les 2000 premières décimales de $\pi$

3,
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952
0353018529 6899577362 2599413891 2497217752 8347913151
5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983
8175463746 4939319255 0604009277 0167113900 9848824012
8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744
9448255379 7747268471 0404753464 6208046684 2590694912
9331367702 8989152104 7521620569 6602405803 8150193511
2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279
6782354781 6360093417 2164121992 4586315030 2861829745
5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955
3211653449 8720275596 0236480665 4991198818 3479775356
6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000
8164706001 6145249192 1732172147 7235014144 1973568548
1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414333
4547762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542
5688767179 0494601653 4668049886 2723279178 6085784383
8279679766 8145410095 3883786360 9506800642 2512520511
7392984896 0841284886 2694560424 1965285022 2106611863
0674427862 2039194945 0471237137 8696095636 4371917287
4677646575 7396241389 0865832645 9958133904 7802759009

$$r = \frac{22}{2} = 11 \text{ ( cm )}$$

$$\mathcal{A} = 4\pi r^2 = 4\pi \times 11^2 = 4 \times \pi \times 121 = 484\pi$$

Une valeur approchée au dixième de cm² est :

$\mathcal{A}$ = 1520,5 cm²

▶ Calculez le volume d'un ballon de basket de rayon 12 cm.

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \times 12^3}{3} = \frac{4\pi \times 12 \times 12 \times 12}{3}$$

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi \times \cancel{3} \times 4 \times 12 \times 12}{\cancel{3}} = 2304\pi$$

Une valeur approchée au dixième de cm³ est :

$\mathcal{V}$ = 7238,2 cm³

Pour retenir les 30 premières décimales ,il suffit de mémoriser le « poème » suivant

**Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages.**
**Immortel Archimède, artiste ingénieur,**
**Qui de ton jugement peut priser la valeur?**
**Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.**

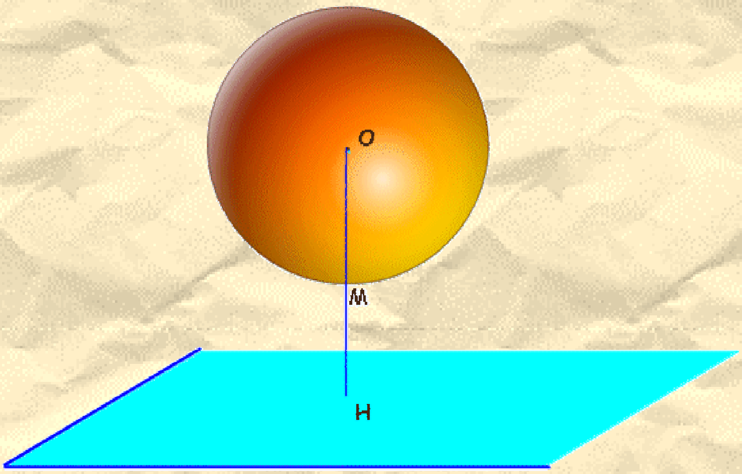
Les décimales de $\pi$ sont données par le nombre de lettres de chaque mot. Ainsi, le premier mot contient 3 lettres, le second 1, le troisième 4, etc... Ne pas tenir compte de la ponctuation.

ⓘ Il est préférable d'utiliser la formule $\frac{4\pi r^3}{3}$ , la division ( opération qui rarement donne un résultat exact ) se faisant à la fin du calcul. L'autre formule $\frac{4}{3}\pi r^3$ commence par une division $\frac{4}{3}$ dont l'écriture décimale n'existe pas.

## Section d'une sphère ( d'une boule ) par un plan :

Soit O le centre d'une sphère. Soit H le pied de la perpendiculaire issue de O sur le plan.
Soit M le point de la sphère situé sur cette perpendiculaire. Nous avons OM = r ( rayon de la sphère )

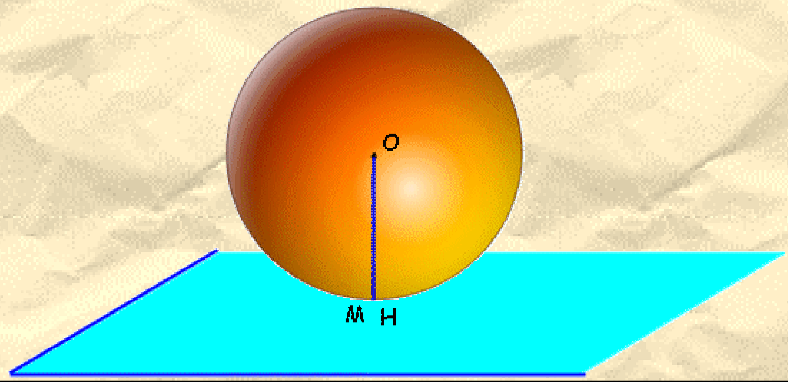
*Cas 1 :* La distance du point O au plan ( distance OH ) est supérieure au rayon r de la sphère.




OH > r

Il n' y a pas d'intersection.
Nous dirons que le plan est extérieur à la sphère .

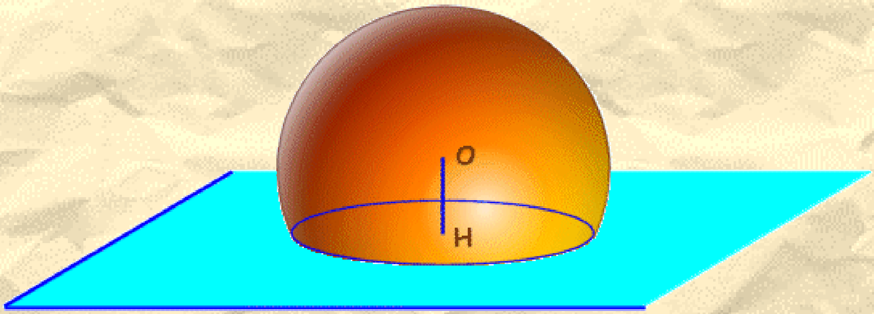
*Cas 2 :* La distance du point O au plan ( distance OH ) est égale au rayon r de la sphère.




OH = r

Nous dirons que le plan est tangent à la sphère en M.
Toutes les droites du plan passant par A sont tangentes à la sphère en M . Elles sont donc perpendiculaires au rayon [OM] .

*Cas 3 :* La distance du point O au plan ( distance OH ) est inférieure au rayon r de la sphère.

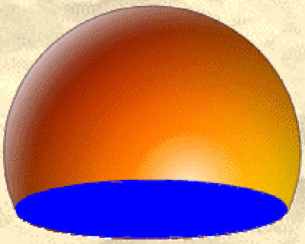


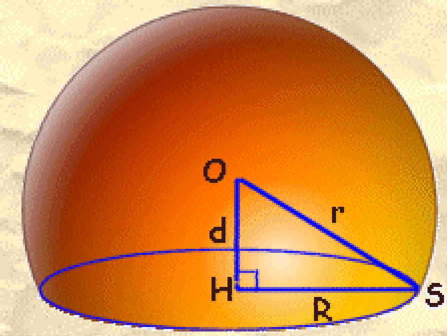

OH < r

Nous dirons que le plan est sécant à la sphère.
L'intersection est un cercle dont le centre est H .

La section d'une sphère par un plan est un cercle.

## *Rayon de la section d'une sphère :*






Calcul du rayon R du cercle de section

Dans le triangle OHS rectangle en H,
D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$OS^2 = OH^2 + HS^2$

$r^2 = d^2 + R^2$

$r^2 - d^2 = R^2$ Et par suite $R = \sqrt{r^2 - d^2}$

*Propriété :*

La section d'une sphère de rayon r avec un plan situé à une distance d du centre de cette sphère est un cercle de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$

*Remarque :*

▶ Si la distance d est égale à 0, c'est à dire si le plan passe par le centre de la sphère, le rayon de la section est égal à $\sqrt{r^2 - 0^2} = \sqrt{r^2} = r$. Le cercle est donc un grand cercle. Donc
La section d'une sphère avec un plan passant par le centre de la sphère est un grand cercle.

▶ Si la distance d est égale à r, c'est à dire si le plan est tangent à la sphère, le rayon de la section est égal à $\sqrt{r^2 - r^2} = \sqrt{0} = 0$. La section est donc un cercle de rayon 0 , c'est à dire un point.

▶ Si la distance d est supérieure à r, c'est à dire si le plan est extérieur à la sphère, nous constatons que la formule $\sqrt{r^2 - d^2}$ n'a pas de sens, le radicande $r^2 - d^2$ étant négatif ( $r < d$ ) . Il n'y a donc pas de section circulaire.

*Exemple :*

On considère une sphère de centre O et de rayon r = 5 cm . Cette sphère est coupée par un plan située à une distance de 3 cm de son centre O. Quelle est la rayon de la section obtenue ?
La section obtenue est un cercle de centre H et de rayon :

$$R = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ (cm)}$$

*Remarque :*

Il est préférable de refaire rapidement la démonstration précédente utilisant le théorème de Pythagore

**Exemple :** Brevet des Collèges - Pondichéry - 2000

Léo, le poisson de Julie,est dans un bocal ayant la forme d'une sphère tronquée ( fixée sur un socle ).

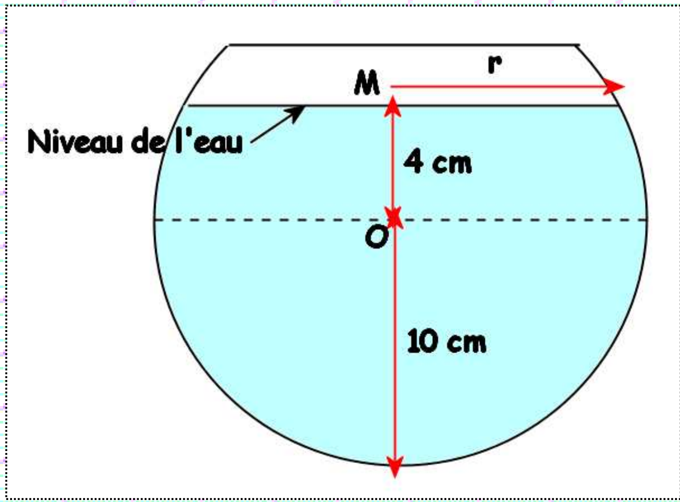
Le rayon de la sphère est de 10 cm. La distance de la surface plane de l'eau au centre O de la sphère est 4 cm.

1.a) Calculer r ( donner la valeur arrondie au mm près ).

b)Quelle est la forme de la surface plane de l'eau ?

c)Calculer l'aire de cette surface ( donner le résultat au $cm^2$ près )

2. Calculer le volume d'eau nécessaire pour remplir le bocal au niveau des pointillés ( donner le résultat au $cm^3$ près, puis au litre près ).




## Solution :

### 1.a) Calcul de r :

En utilisant le point A défini comme sur le dessin , nous avons :

Dans le triangle OMA rectangle en M ;

D'après le théorème de Pythagore :

$OA^2 = OM^2 + MA^2$

Sachant que OA = 10 cm ( rayon de la sphère ) :

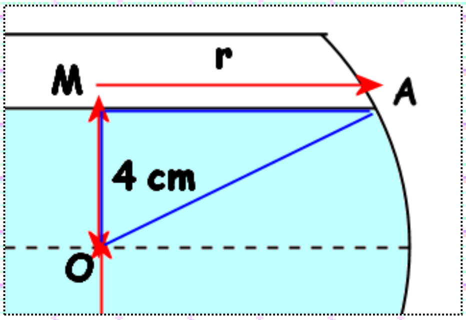
$10^2 = 4^2 + r^2$

$100 = 16 + r^2$

$100 - 16 = r^2$

$84 = r^2$

$$\boxed{r = \sqrt{84} \approx 9{,}2 \text{ ( cm )}}$$




### b) Forme de la surface plane de l'eau :

LA section d'une sphère ( respectivement d'une boule ) avec un plan est un cercle ( respectivement un disque ). Donc la surface plane de l'eau à la forme d'un cercle d'environ 9,2 cm de rayon.

### c) Aire de cette surface :

L'aire d'un disque est : $\mathcal{A} = \pi \times r^2$

C'est à dire, dans notre cas : $\mathcal{A} = \pi \times 84$ ( car $r^2 = 84$ - cf. question 1.a )

Soit $\mathcal{A} = 84\pi \approx 264 \text{ cm}^2$ ( résultat au $cm^2$ près )

### 2. Volume d'eau nécessaire pour remplir le bocal au niveau des pointillés :

Ce volume est le volume d'une demi-boule de rayon 10 cm. Nous avons donc :

$$\mathcal{V} = \frac{\frac{4 \times \pi \times 10^3}{3}}{2} = \frac{\frac{4000 \times \pi}{3}}{2} = \frac{4000 \times \pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4000 \times \pi}{3 \times 2} = \frac{\cancel{2} \times 2000 \times \pi}{3 \times \cancel{2}} = \frac{2000 \times \pi}{3} \approx 2094 \text{ cm}^3$$

$\mathcal{V} = 2094 \text{ cm}^3 = 2{,}094 \text{ dm}^3 = 2{,}094 \text{ l}$ soit

$$\boxed{\mathcal{V} \approx 2 \text{ L} \quad \text{( au litre près )}}$$