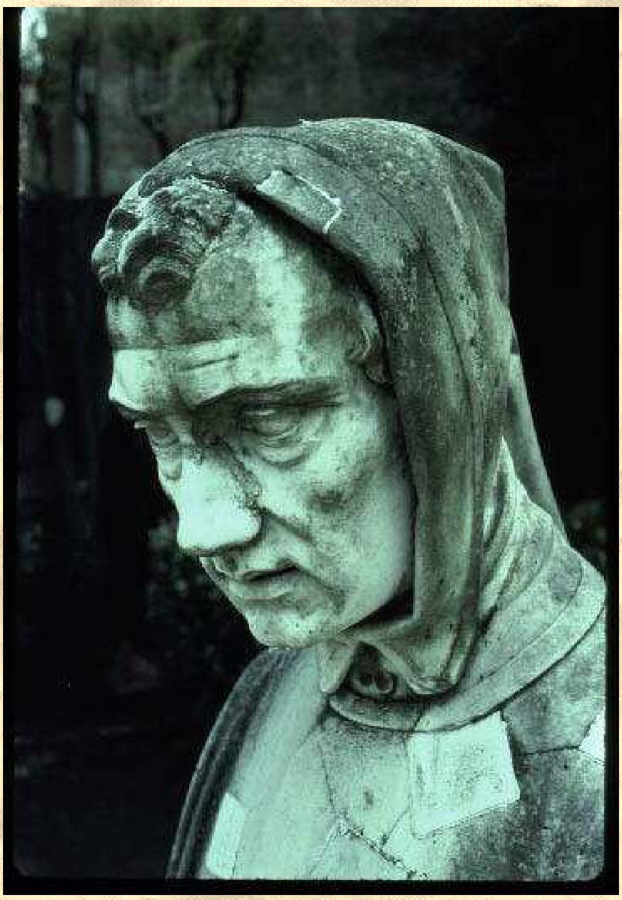
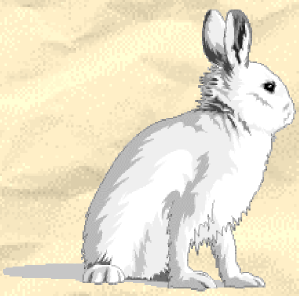
THEME 8

SUITE DE FIBONACCI

Leonardo Fibonacci (Pise, vers 1170 - vers 1250) est un mathématicien italien. Fibonacci (de son nom moderne), connu à l'époque sous le nom de Leonardo Pisano (Léonard de Pise), mais aussi de Leonardo Bigollo (bigollo signifiant voyageur), s'appelait en réalité Leonardo Guilielmi.



Né à Pise, en Italie, son éducation s'est faite en grande partie en Afrique du Nord. Son père, Guilielmo Bonacci, gérait les marchés de la république de Pise en Algérie, en Tunisie et au Maroc. En 1202 il en rapporta les chiffres arabes et la notation algébrique. Cette même année, il publia son Liber Abaci (Le livre des calculs), un traité sur les calculs et la comptabilité fondé sur le calcul décimal à une époque où tout l'Occident utilisait encore les chiffres romains et calculait sur abaque. Ce livre est fortement influencé par sa vie dans les pays arabes ; il est d'ailleurs rédigé en partie de droite à gauche. Par cette publication, Fibonacci introduit le système de notation indienne en Europe. Ce système est bien plus puissant et rapide que la notation romaine, et Fibonacci en est pleinement conscient. Il peina cependant à s'imposer avant plusieurs siècles. L'invention sera mal reçue car le public ne comprenait plus les calculs que faisaient les commerçants. En 1280, Florence interdit même l'usage des "chiffres arabes" par les banquiers. On jugea que le 0 (appelé zéfirum) apportait la confusion et des difficultés. Après quelques modifications, ce mot aboutit à zéfiro, qui donnera zéro à partir de 1491.



Fibonacci est célèbre, de nos jours, pour le problème suivant qu'il a posé :

" *Un couple de lapins étant dans un espace clos, combien de couples de lapins peut-il engendrer en un an, sachant que chaque couple donne naissance à un nouveau couple à partir du deuxième mois (la gestation du lapin est d'un mois environ)* ? "

Exercice 1 :

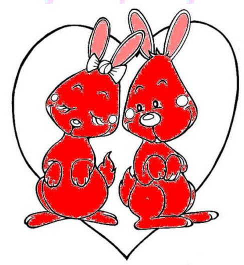
Refaites et complétez le tableau suivant :

Le dessin des couples de lapins n'est pas nécessaire, le but étant de déterminer, chaque mois, le nombre total de couples de lapins.

MOIS 0 : (début)

Il n'y a qu'un seul couple de lapins.

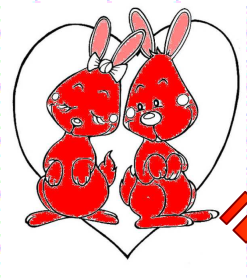
1 couple



MOIS 1 :

Chaque couple donne naissance à un nouveau couple à partir du deuxième mois. Il n'y a donc, encore, qu'un seul couple de lapins.

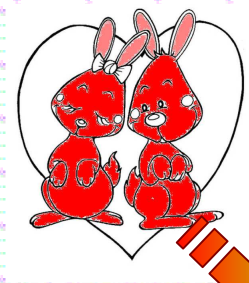
1 couple

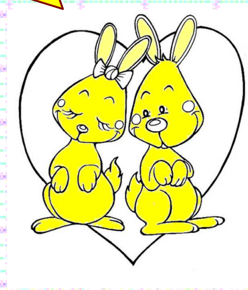


MOIS 2 :

Le couple initial de lapins donne, maintenant, naissance à un nouveau couple de lapins.

2 couples

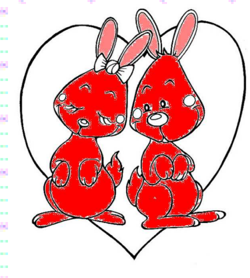


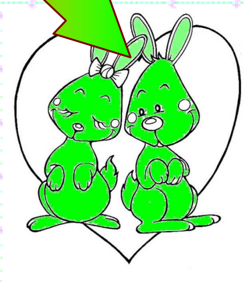


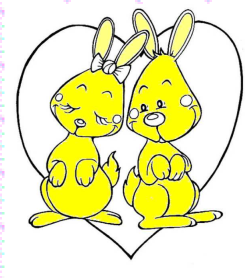
MOIS 3 :

Le couple initial redonne naissance à un nouveau couple de lapins , mais le deuxième couple doit encore attendre 1 mois avant de donner naissance à un couple.

3 couples







MOIS 4 :

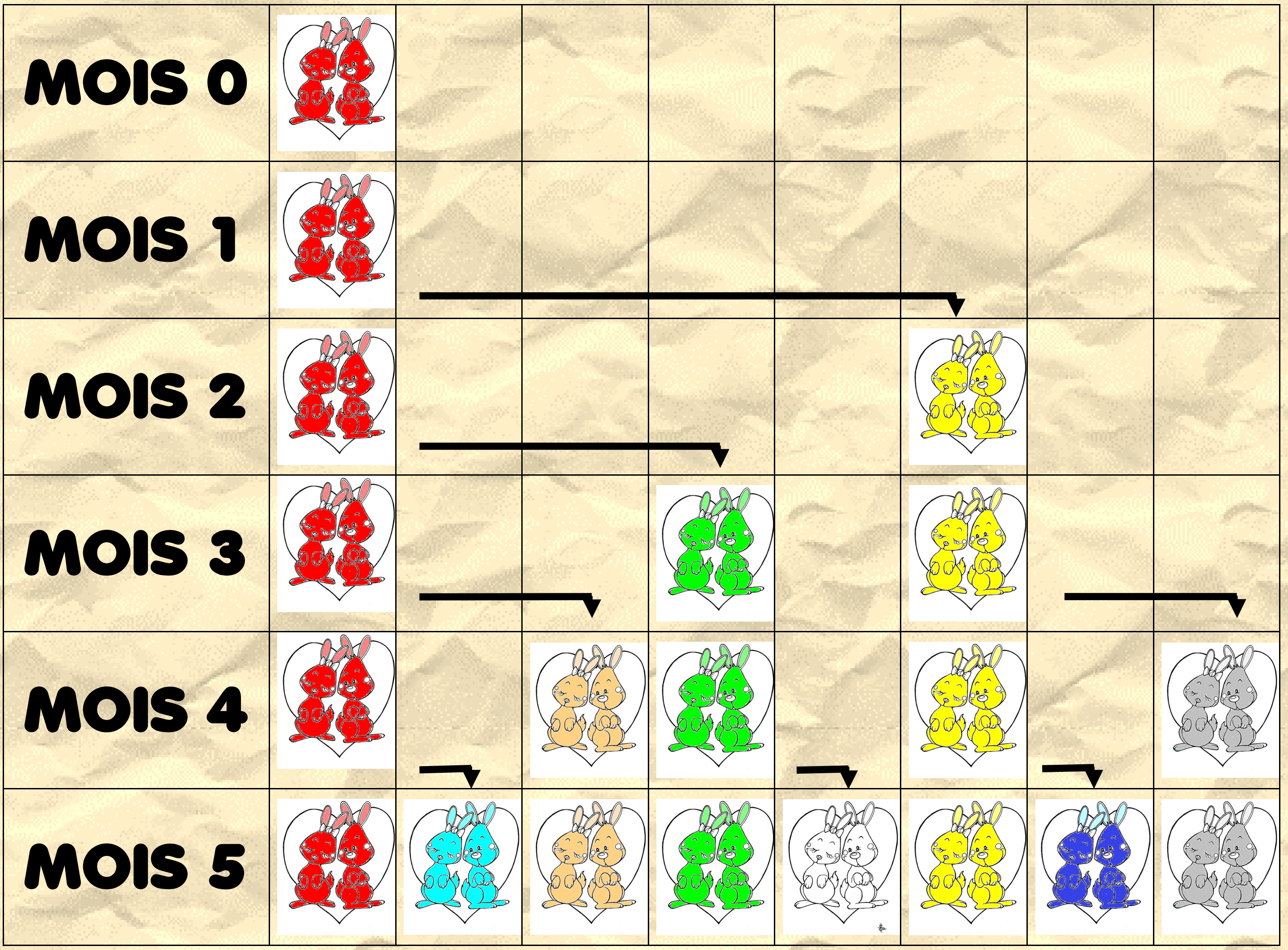
... couples

....

MOIS 8 :

... couples

Explication partielle (jusqu'au $6^{ème}$ mois : Mois 5)



Peut-on prévoir le nombre de couples de lapins ?

Le nombre de naissances (nouveaux couples de lapins) est égal au nombre de lapins qui ont au moins 2 mois (2 mois, 3 mois, 4 mois, …). Ce nombre est le nombre de couples de lapins existant deux mois auparavant. Ce nouveau nombre de naissances s'ajoute au nombre de couples de lapins existants, c'est à dire au nombre de couples de lapins du mois précédent.

Dans le tableau précédent , le nombre de lapins qui existent au $7^{ème}$ mois (MOIS 6) est égale 5 (nombre de couples de lapins existant il y a deux mois et qui correspond au nombre de nouvelles naissances) additionné de 8 (nombre de couples de lapins existant le mois précédent) , soit 5 + 8 , c'est à dire 13

MOIS 0	1	1
MOIS 1	1	1
MOIS 2	1 + 1	2
MOIS 3	2 + 1	3
MOIS 4	3 + 2	5
MOIS 5	5 + 3	8
MOIS 6	8 + 5	13
MOIS 7	13 + 8	21
MOIS 8	21 + 13	34
MOIS 9	34 + 21	55
MOIS010	55 + 34	89
MOIS 11	89 + 55	144

Cette suite de nombre s'appelle la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci est une suite de nombres dont chaque terme est la somme des deux précédents

Exercice 2 :

Déterminez les vingt premiers nombres de la suite de Fibonacci.

Cette suite est : 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765.

Remarque :

La suite de Fibonacci présente de nombreuses propriétés

Exercice 3 :

Prenez trois nombres consécutifs de la suite de Fibonacci. Comparez le carré du nombre central au produit des deux qui l'encadrent.

▶ Choix des trois nombres : 2 ; 3 et 5

$3^2 = 9$ et $2 \times 5 = 10$ $\qquad 3^2 - 2 \times 5 = -1$

▶ Choix des trois nombres : 5 ; 8 et 13

$8^2 = 64$ et $5 \times 13 = 65$ $\qquad 8^2 - 5 \times 13 = -1$

▶ Choix des trois nombres : 13 ; 21 et 34

$21^2 = 441$ et $13 \times 34 = 442$ $\qquad 21^2 - 13 \times 34 = -1$

Pour trois termes consécutifs, le produit des deux nombres extrêmes est égal au carré du nombre central à une unité près. (c'est à dire que la différence est 1 ou – 1)

Exercice 4 :

Prenez quatre nombres consécutifs de la suite de Fibonacci. Comparez le produit des deux extrêmes aux carrés de ceux du milieu.

▶ Choix des quatre nombres : 2 ; 3 ; 5 et 8

$2 \times 8 = 16$ et $3^2 = 9$ et $5^2 = 25$

On remarque que $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 2 \times 8$

▶ Choix des quatre nombres : 5 ; 8 , 13 et 21

$5 \times 21 = 105$ et $8^2 = 64$ et $13^2 = 169$

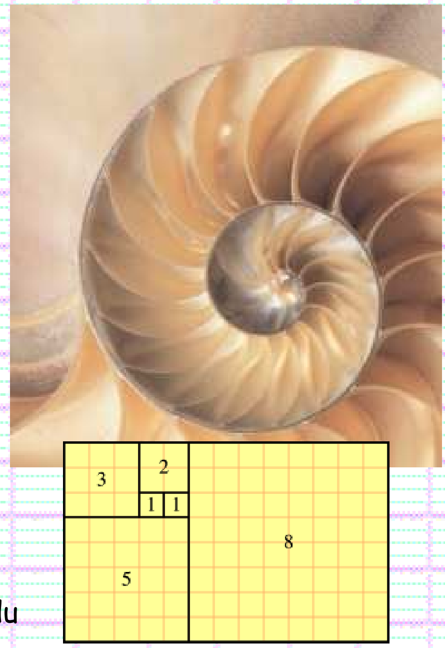
On remarque que $13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105 = 5 \times 21$

Pour quatre termes consécutifs, le produit des deux nombres extrêmes est égal à la différence des carrés des deux nombres centraux.

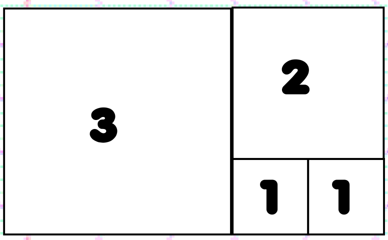
LA SUITE DE FIBONACCI DANS LA NATURE

SPIRALE DE FIBONACCI ou SPIRALE D'OR

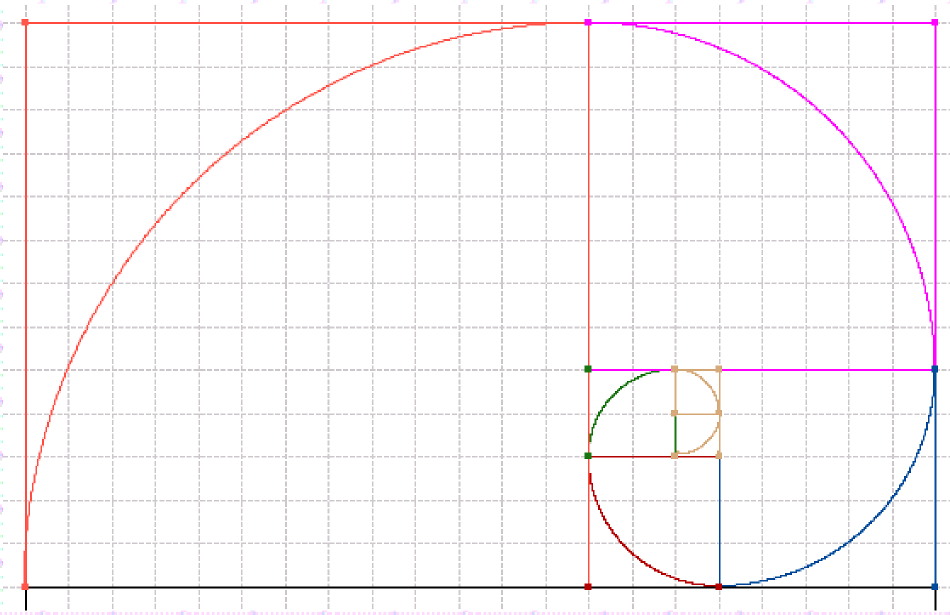
Exercice 5 :



Tracez un carré de 1 cm de côté. Puis tracez un deuxième carré de 1 cm de côté ayant un coté commun avec le précédent.
Tracez ensuite un carré de côté 2 cm « reposant » sur les deux précédents. Tracez ensuite, comme sur le dessin ci-dessous, en enroulant, des carrés de 3 cm de côté, puis de 5 cm , puis de 8 cm (1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , … étant les premiers nombres de la suite Fibonacci)



Lorsque vous aurez tracé plusieurs carrés, tracez, dans chaque carré, des quarts de cercle de centre le sommet de ce carré, sommet le plus proche du carré initial de 1 cm sur 1 cm.
(Cf . figure)



Vous obtenez alors une spirale de Fibonacci, encore appelée spirale d'or.

Cette spirale se retrouve souvent dans la nature.

LE NAUTILE

La coquille du nautile suit cette spirale.

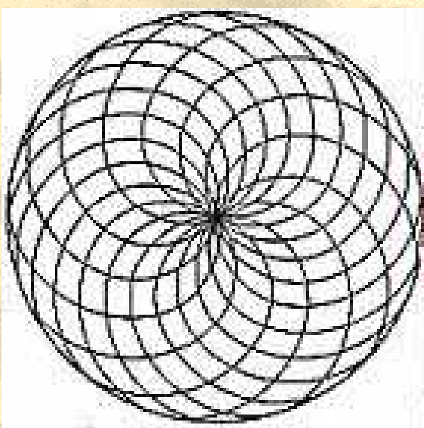
Au fur et à mesure qu'il grandit, le nautile est obligé de se construire une nouvelle loge, plus spacieuse que la précédente. Les loges, de plus en plus grandes, sont donc disposées régulièrement à la suite les unes des autres.

Cette forme spiralée se retrouve sur de nombreuses coquilles calcaires de mollusques, escargots…

AFFICHE : ANNEE MONDIALE DES MATHEMATIQUES

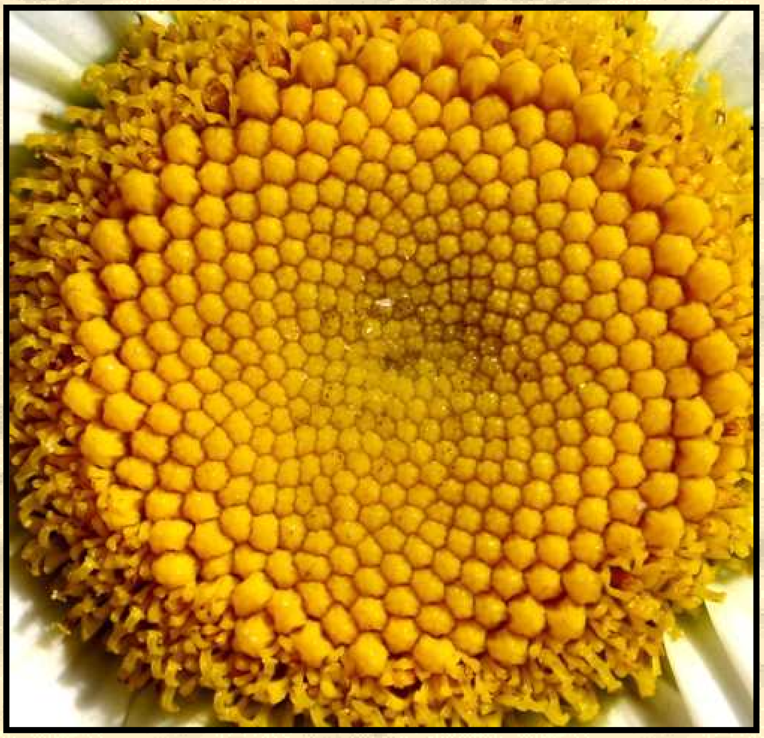
LES FLEURS ET LES PLANTES

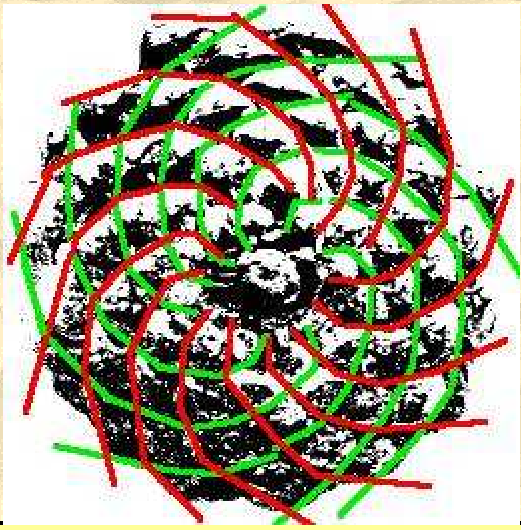
Pourquoi le nombre de pétales des fleurs est-il souvent un des nombres suivants : 3, 5, 8, 13, 21, 34 ou 55 ? Par exemple, les lis ont 3 pétales, les boutons d'or en ont 5, les chicorées en ont 21, les marguerites ont souvent 34 ou 55 pétales, etc.
Par ailleurs, lorsqu'on observe le cœur des tournesols on remarque deux séries de courbes, une enroulée dans un sens et une dans l'autre; le nombre de spirales n'étant pas le même dans chaque sens. Pourquoi le nombre de spirales est-il en général soit 21 et 34, soit 34 et 55, soit 55 et 89, ou soit 89 et 144? De même pour les pommes de pin : pourquoi ont-elles soit 8 spirales d'un côté et 13 de l'autre, soit 5 spirales d'un côté et 8 de l'autre? Et finalement, pourquoi le nombre de diagonales d'un ananas est-il aussi 8 dans une direction et 13 dans l'autre ?



Remarquons cependant que, si dans le cas du tournesol, de l'ananas et de la pomme de pin, la correspondance avec les nombres de Fibonacci est très exacte, on ne retrouve pas cette exactitude dans le nombre de pétales des fleurs. Cette loi n'est vérifiée qu'en moyenne (et dans certains cas, le nombre de pétales est doublé car les pétales sont disposés sur deux étages).

Pourquoi ces nombres ? C'est depuis peu de temps que l'on comprend l'importance de cette suite de Fibonacci. C'est une question d'efficacité dans le processus de croissance des plantes .

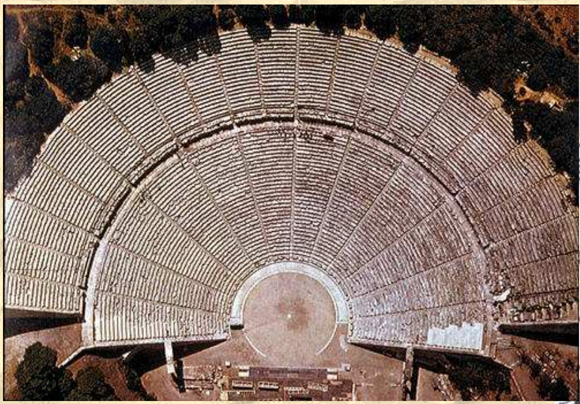


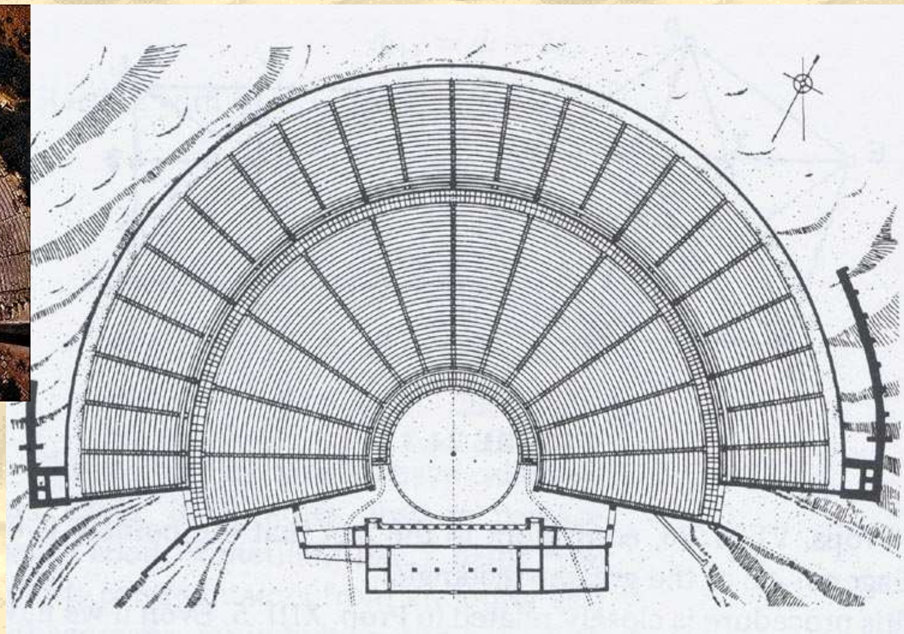


Spirales : 8 et 13 sur une pomme de pin

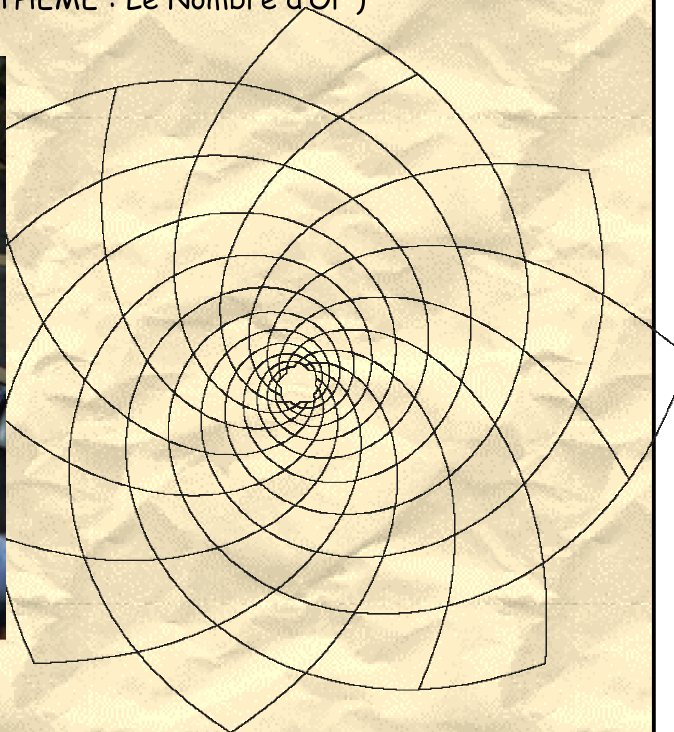
LE THEATRE D'EPIDAURE

Le théâtre d'Épidaure figure parmi les mieux préservés de Grèce. Sous l'Antiquité, il était déjà célèbre par l'harmonie de ses proportions. Il a été conçu par l'architecte et sculpteur Polyclète le Jeune au milieu du IVe siècle av. J.-C.,





Ce théâtre dispose dans sa partie basse de 34 rangées de sièges, avec, pour y accéder 13 escaliers (il y a des escaliers aux extrémités). Plus tard, ce théâtre a été agrandi, dans sa partie supérieure, avec 21 rangées de sièges. Soit, un total de 55 rangées.
Nous retrouvons certaines termes de la suite Fibonacci. (1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , …). Les Grecs connaissaient ces nombres sous une autre forme (Cf. THEME : Le Nombre d'Or)

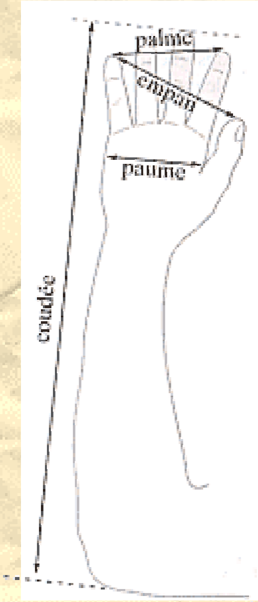


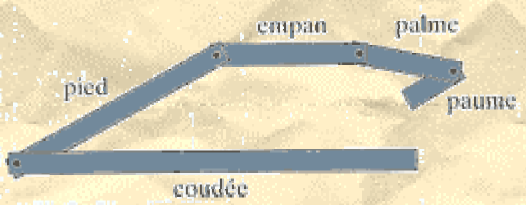
LES BATISSEURS DE CATHEDRALES - LA CANNE ROYALE

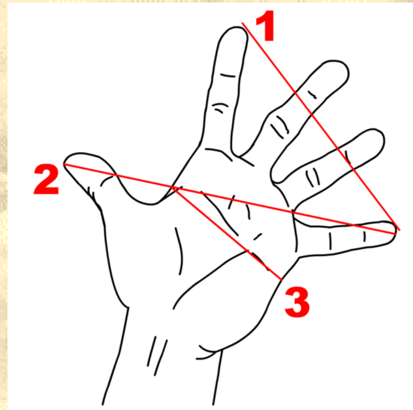
La canne royale était un instrument de mesure ancien utilisée dans la construction. Sa longueur était de 1,25 mètres.

Au moyen âge, les bâtisseurs de cathédrales utilisaient une canne constituée de cinq tiges articulées.

Chaque tige avait pour longueur une unité de mesure de l'époque : la paume, la palme, l'empan, le pied et la coudée.







La ligne (line, symbole: ln) était l'unité de mesure de longueur référence durant le Moyen Âge. Généralement, c'était le pouce divisé par douze (un douzième du pouce du Roi). La ligne pouvait également être définie comme le diamètre d'un grain d'orge !!

1 ligne = 2,256 mm (ou 2,247 mm valeur qui pouvait varier selon les régions)

- la paume = 34 lignes environ 7,64 cm
- la palme = 55 lignes environ 12,36 cm
- l'empan = 89 lignes environ 20 cm
- le pied = 144 lignes environ 32,4 cm
- la coudée = 233 lignes environ 52,4 cm

Nous nous apercevons que les différents nombres écrits ci-dessus sont des termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233

Par conséquent, une unité de mesure est égale à la somme des deux précédentes

COUDEE = PIED + EMPAN

PIED = EMPAN + PALME

EMPAN = PALME + PAUME

Remarque : Selon les pays, les époques, les régimes, les religions ou les monuments les mesures de bases étaient différentes mais la progression était semblable.

Fibonacci est la contraction de « Filius Bonacci »

Problème

Vous désirez monter un escalier. A chacun de vos pas, vous pouvez gravir soit une, soit deux marches.

De combien de manières différentes pouvez-vous monter un escalier de 6 marches ?

Pour 6 marches il y a 13 manières...

Pour un nombre quelconque de marches, on vient soit du niveau précédent, soit de deux niveaux en dessous.Il faut donc additionner les nombres de manières de monter à chacun de ces niveaux, comme dans la suite de Fibonacci.