

THEME 8

TRIANGLE ET MILIEUX

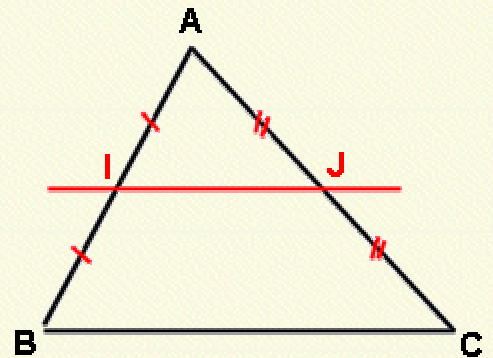
Théorème des milieux

Soit ABC un triangle.

Soit I le milieu de [AB].

Si J est le milieu de [AC],
alors (IJ) est parallèle à (BC)

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.



► Permet de montrer que deux droites sont parallèles.

Ce théorème est souvent accompagné d'une conclusion supplémentaire. Le segment [IJ] a pour longueur la moitié de la longueur du troisième côté [BC].

Supplément du théorème des milieux

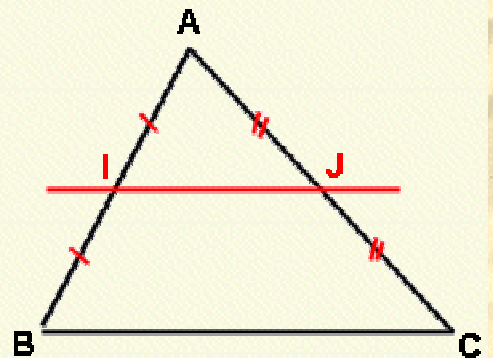
Soit ABC un triangle.

Soit I le milieu de [AB].

Si J est le milieu de [AC],
alors

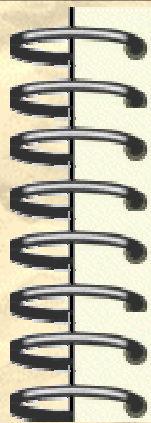
$$IJ = \frac{BC}{2}$$

Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés a pour longueur la moitié de la longueur du troisième côté.



Il est bon de séparer ces deux théorèmes.

Le premier théorème (théorème des milieux) admet une réciproque (appelée réciproque du théorème des milieux)



Réciproque du théorème des milieux

Soit ABC un triangle.

Soit I le milieu de [AB]. (J est un point de (AC))

Si (IJ) est parallèle à (BC) alors J est milieu de [AC].

Dans un triangle, la droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

► Permet de montrer qu'un point est milieu.

Le "supplément " du théorème des milieux admet-il une réciproque ?

Exercice

Soit ABC un triangle vérifiant $AB = 6$; $AC = 7$; $BC = 3$

Soit I le milieu de [AB].

Soit J est un point de (AC) tel que: $IJ = \frac{BC}{2} = 1,5$

(IJ) est-elle forcément parallèle à (BC) ?

Solution :

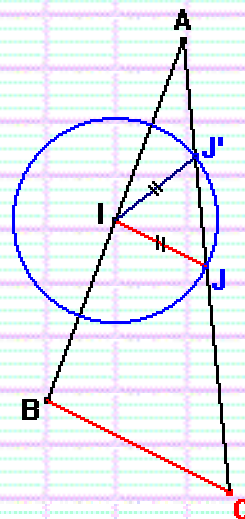
D'après le **théorème des milieux**, le point J milieu de [AC] est bien tel que :

$$IJ = \frac{BC}{2} = 1,5 \text{ et } (IJ) \parallel (BC).$$

Mais si on trace le cercle de centre I et de rayon 1,5 celui-ci recoupe [AC] en un 2^{ème} point J'.

Pour ce point J' on a aussi $IJ' = 1,5 = BC/2$, mais (IJ') n'est pas parallèle à (BC) .

La réponse à la question posée est **NON**.



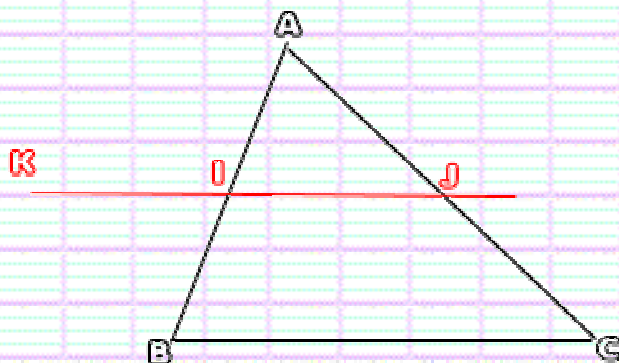
LES DEMONSTRATIONS

Démonstration du théorème des milieux : (Niveau 4^{ème})

Remarque : Nous allons utiliser un théorème (inexact) concernant le parallélogramme :

Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a deux côtés parallèles et de même longueur.

Soit ABC un triangle et soient I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].



Soit K le symétrique de J par rapport à I.

- a) Montrer que le quadrilatère AJBK est un parallélogramme.
- b) En déduire que les droites (BK) et (JC) sont parallèles.
- c) Montrer que $BK = JC$.
- d) En déduire que le quadrilatère BKJC est un parallélogramme.
- e) En déduire que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

f) En utilisant la même figure et le fait que BKJC est un parallélogramme, démontrer que $IJ = \frac{BC}{2}$

Démonstration du théorème des milieux : (Niveau 3^{ème})

Nous pouvons utiliser la réciproque de Thalès, le théorème des milieux n'étant qu'un cas particulier de cette réciproque.

Sinon, en reprenant la démarche de 4^{ème} précédente, nous pouvons faire une démonstration qui évite d'utiliser le théorème inexact concernant le parallélogramme. Avec les vecteurs, nous pouvons démontrer :

$$\vec{KB} = \vec{AJ} \quad (\text{AJBK est un parallélogramme})$$

$$\vec{AJ} = \vec{JC} \quad (\text{J milieu de [AC]})$$

$$\text{donc} \quad \vec{KB} = \vec{JC}$$

donc KBCJ est un parallélogramme

donc (KJ) et (BC) sont parallèles et par suite

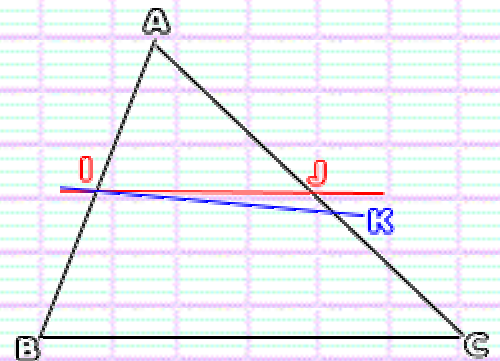
(IJ) et (BC) sont parallèles

Démonstration de la réciproque du théorème des milieux :

Soit ABC un triangle et soient I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].

La parallèle à la droite (BC) passant par I coupe [AC] en K

- a) Montrer que (IJ) et (BC) sont parallèles.
 - b) En déduire que les droites (IJ) et (IK) sont parallèles.
- En déduire alors que J = K



Autre démonstration avec les aires :

Soit ABC un triangle et soit I le milieu du côté [AB].

La parallèle à la droite (BC) coupe [AC] en J.

- a) Démontrer que les deux triangles AIJ et IJB ont même aire.
- b) Démontrer que les triangles IJB et IJC ont même aire.
- c) En déduire que les triangles AIJ et IJC ont même aire.
- d) En déduire que J est milieu de [AC].

(Propriétés à utiliser dans cette démonstration :

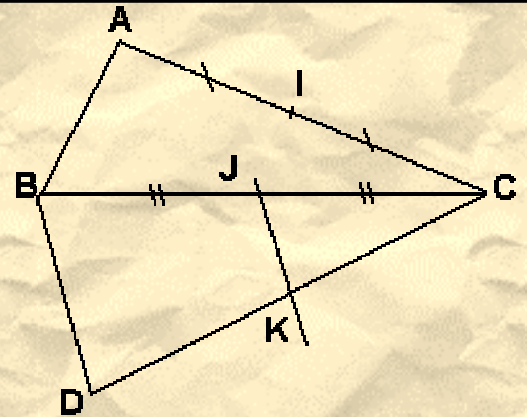
- L'aire d'un triangle ne change pas lorsqu'un sommet se déplace sur une droite parallèle au côté opposé.
- Dans un triangle, la médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.)

REDACTION D'UN EXERCICE UTILISANT CES THEOREMES

Rédaction de l'exercice suivant :

Sur la figure , I est le milieu de $[AC]$, J celui de $[BC]$ et la droite (JK) est parallèle à (BD) .

Montrer que les droites (IK) et (AD) sont parallèles .



K milieu de $[CD]$?

Dans le triangle BCD,

- J milieu de $[BC]$ (hypothèse)
- (JK) parallèle à (BD) (hypothèse)

Donc d'après la réciproque du théorème des milieux

le point K est milieu de $[CD]$

(IK) et (AD) sont parallèles ?

Dans le triangle ACD,

- I milieu de $[AC]$ (hypothèse)
- K milieu de $[CD]$ (question précédente)

Donc d'après le théorème des milieux

les droites (IK) et (AD) sont parallèles

Dans les deux cas, théorème des milieux et réciproque du théorème des milieux, la rédaction est similaire :

➤ Décor :

Dans le triangle ?????

➤ Les 2 conditions :

- ▶ 2 milieux pour le théorème des milieux.
- ▶ 1 milieu et deux droites parallèles pour la réciproque du théorème des milieux.

➤ Nom du théorème utilisé :

➤ Conclusion :