THEME : Correction

MILIEUX ET PARALLELES DANS UN TRIANGLE

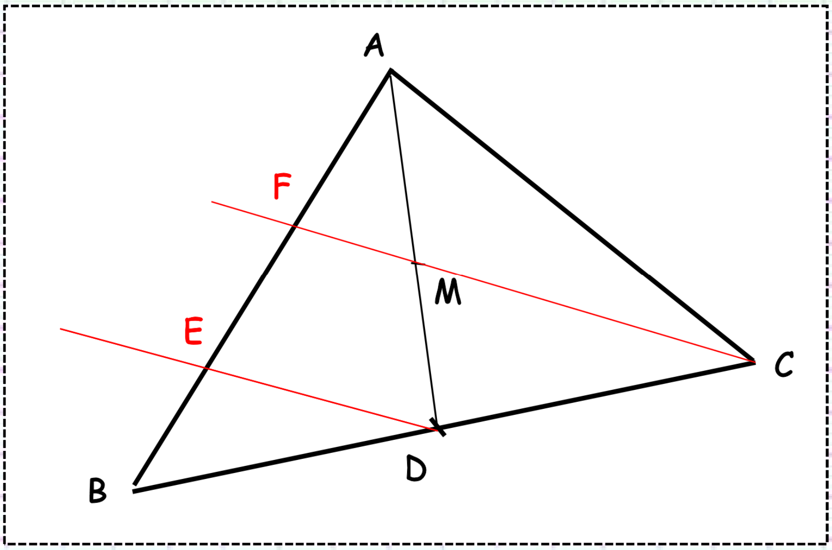
CORRECTION(S) EXERCICES SERIE 1

▶ **Exercice :**

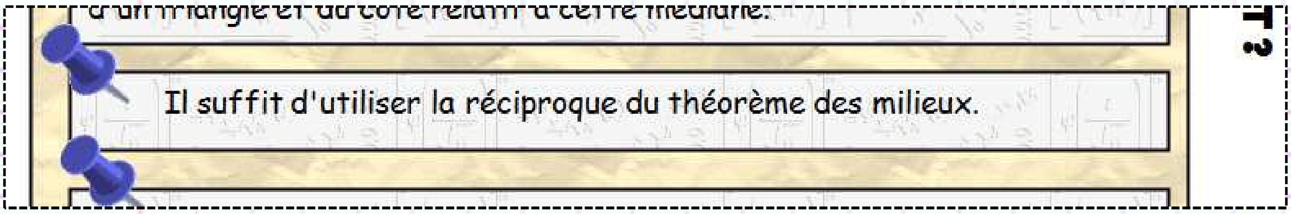
Soit ABC un triangle. Soit D le milieu de [BC]. Soit M le milieu de [AD].
Les parallèles à la droite (CM) passant par D et C coupent la droite (AB) respectivement en E et F.
a) Faire une figure.
b) Montrer que E est milieu de [BF].
c) Montrer que F est milieu de [AE].
d) En déduire que BE = EF = FA.

Correction :

a) Figure :



b) Milieu de [BF] :
Il existe plusieurs moyens pour démontrer qu'un point est milieu d'un segment.
Un outil est la réciproque du théorème des milieux.

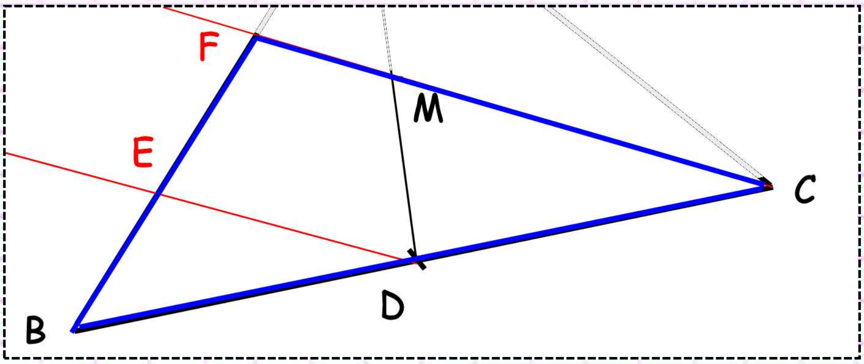


<u>Réciproque du théorème des milieux</u>

Soit ABC un triangle.
Soit I le milieu de [AB]. (J est un point de (AC))
Si (IJ) est parallèle à (BC) alors J est milieu de [AC].

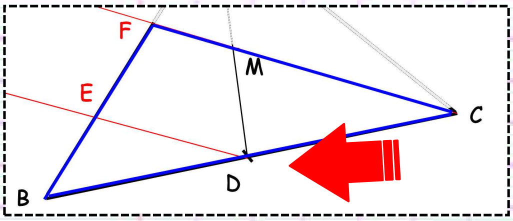
Dans un triangle, la droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

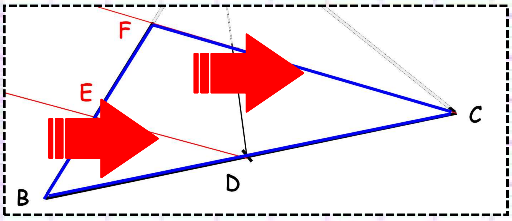
Nous désirons démontrer que E est milieu du segment [BF]. Si notre intention est d'utiliser la réciproque des milieux, le segment [BF] doit être un côté de triangle.
En regardant le dessin, nous constatons qu'il existe un triangle déjà défini qui possède [BF] comme côté, à savoir le triangle BFC !



Le triangle étant choisi, nous devons avoir :

▷ *un milieu de côté (D est milieu d'un côté)*





▷ *des droites parallèles (un côté et une droite passant par ce milieu… … et par le point E futur milieu)*

La rédaction est donc la suivante :

Dans la triangle BCF ,

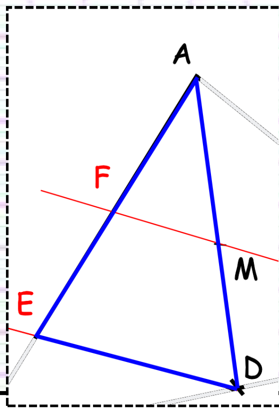
▶ D est milieu de [BC] (hypothèse)
▶ (DE) || (CF) (hypothèse)

Donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, le point E (qui appartient à [BF]) est milieu de [BF].

E milieu de [BF]

<u>c) Milieu de [AE] :</u>

Nous allons procéder de la même manière que précédemment.
Le triangle AED est un triangle ayant comme côté [AE]. Dans ce triangle, nous avons un milieu (le point M est milieu de [AD]) et deux droites parallèles (les droites (DE) et (MF) – encore appelé (CM)).
Nous pouvons donc écrire :



Dans le triangle AED ,

▶ M est milieu de [AD] (hypothèse)

▶ (CM) || (ED) (hypothèse)

donc (MF) || (ED)

Donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, le point F (qui appartient à [AE]) est milieu de [AE].

F milieu de [AE]

d) Egalité BE = EF = FA :

▷ E milieu de [BF] (question b)

donc BE = EF

▷ F milieu de [AE] (question b)

donc EF = FA

Ces deux égalités permettent d'écrire : BE = EF = FA

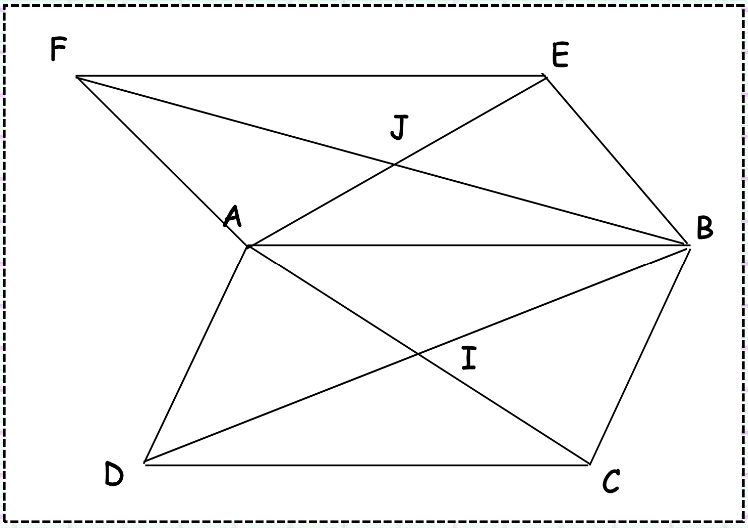
▶ *Exercice :*

Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes de centres respectifs I et J.

a)Montrer, en utilisant la droite (IJ), que les droites (DF) et (CE) sont parallèles.

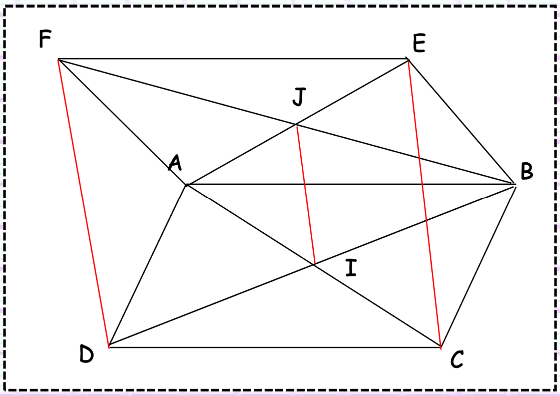
b)En déduire la nature du quadrilatère DCEF.

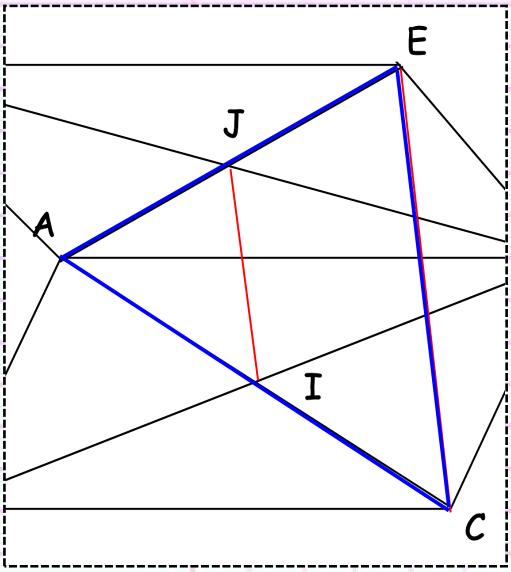
Correction :



a) Positions relatives des droites (DF) et (CE) :

Pour démontrer que les deux droites (DF) et (CE) sont parallèles, nous allons démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même droite (IJ).





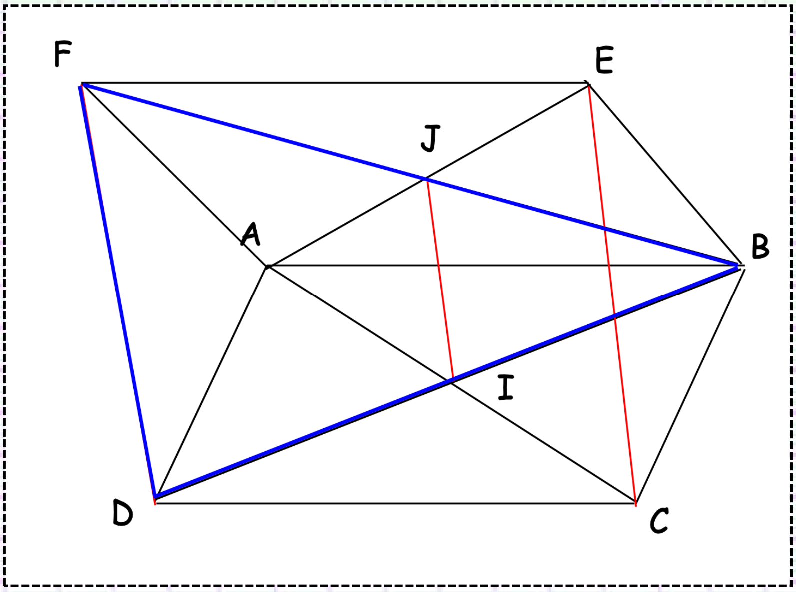
Dans le triangle AEC,

▷ I milieu de [AC] (I centre du parallélogramme ABCD)

▷ J milieu de [AE] (J centre du parallélogramme ABEF)

donc, d'après le théorème des milieux,

(IJ) || (CE)



Dans le triangle BFD,

▷ I milieu de [BD] (I centre du parallélogramme ABCD)

▷ J milieu de [BF] (J centre du parallélogramme ABEF)

donc, d'après le théorème des milieux,

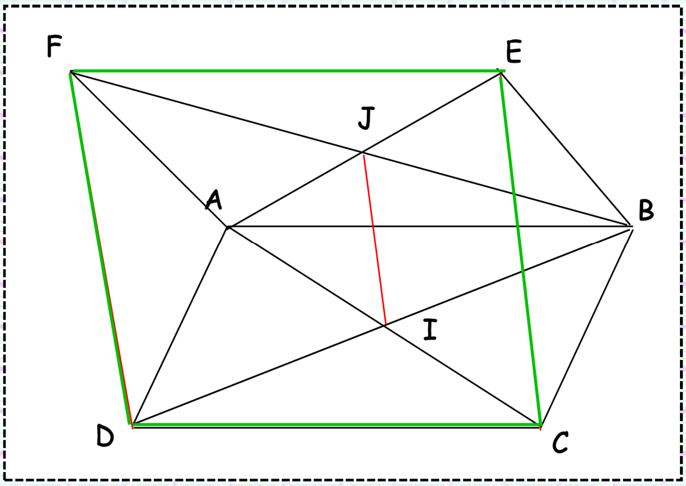
(IJ) || (DF)

▷ (IJ) || (CE)

▷ (IJ) || (DF)

donc (CE) || (DF)

b) Nature du quadrilatère DCEF :



(AB) || (DC) (côtés opposés du parallélogramme ABCD)

(AB) || (EF) (côtés opposés du parallélogramme ABEF)

donc (DC) || (EF)

Conclusion :

▷ (DC) || (EF) (voir ci-dessus)
▷ (CE) || (DF) (question a)

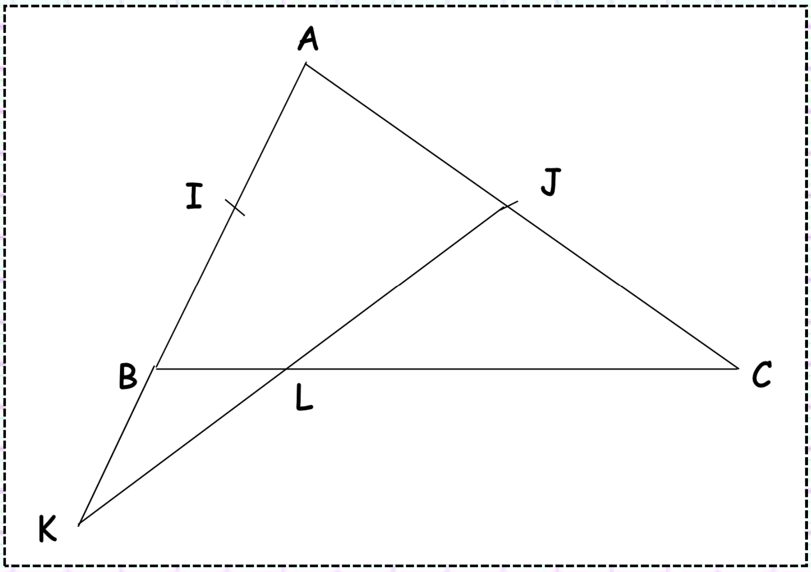
donc les côtés opposés du quadrilatère DCEF sont parallèles
donc

DCEF est un parallélogramme.

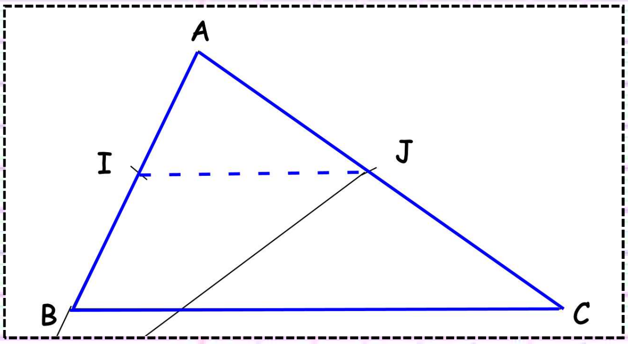
▶ *Exercice :*

Soit ABC un triangle. Soient I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]. Soit K le symétrique de I par rapport à B. La droite (KJ) coupe la droite (BC) en L.
Démontrer que le point L est milieu de [KJ].
(On pourra commencer par démontrer que (IJ) est parallèle à (BL).)

Correction :



Une aide nous est donnée. Il est demandé de démontrer que les droites (IJ) et (BL) (ou (BC)) sont parallèles.

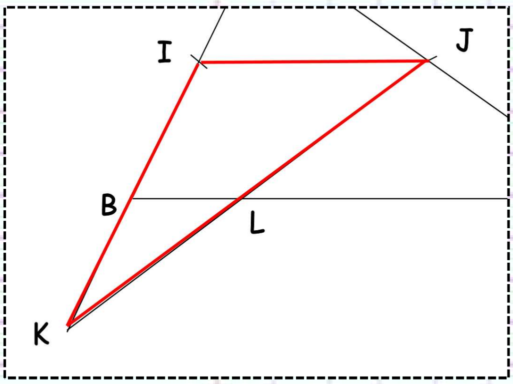


▶ <u>Positions relatives des droites (IJ) et (BC) :</u>
Dans le triangle ABC,
▷ I milieu de [AB] (hypothèse)
▷ J milieu de [AC] (hypothèse)
donc, d'après le théorème des milieux,

(IJ) || (BC)

et par suite (L étant un point de (BC))

(IJ) || (BL)



▶ <u>Milieu de [KJ] :</u>
Dans le triangle KIJ ,
▷ B est milieu de [IK] (K est le symétrique de I par rapport à B)
▷ (IJ) || (BL) (démonstration ci-dessus)

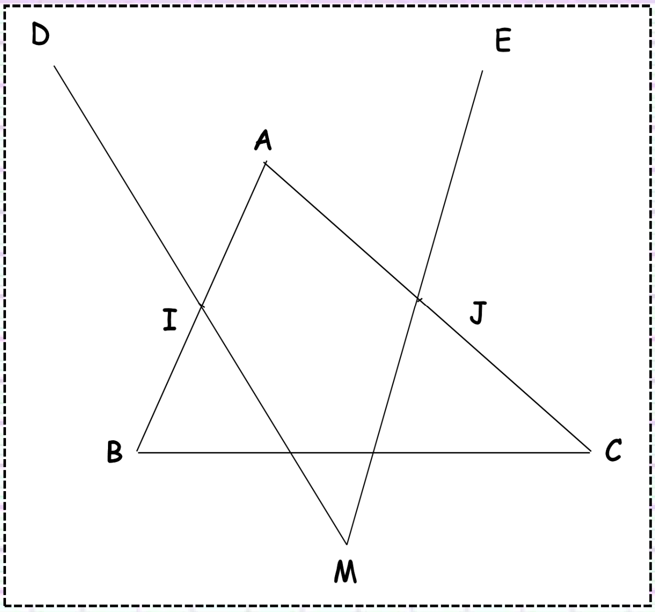
donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, le point L (L appartient à [KJ]) est milieu de [KJ].

L milieu de [KJ]

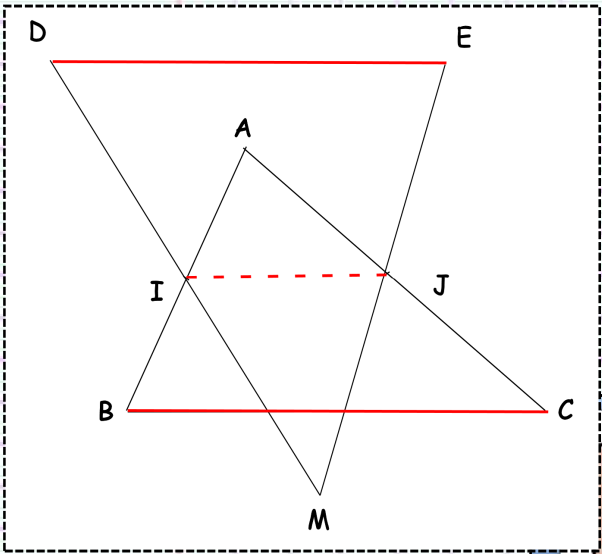
▶ *Exercice :*

Soit ABC un triangle. Soient I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]. Soit M un point quelconque du plan distinct de I et de J. Soit D le symétrique de M par rapport au point I et soit E le symétrique de M par rapport au point J.
Montrer que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Correction :



Pour démontrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles, nous allons démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même troisième, à savoir la droite (IJ).



▶ Positions relatives des droites (IJ) et (BC) :

Dans le triangle ABC,
- ▷ I milieu de [AB] (hypothèse)
- ▷ J milieu de [AC] (hypothèse)

donc, d'après le théorème des milieux, (IJ) || (BC)

▶ Positions relatives des droites (IJ) et (DE) :

Dans le triangle MDE,
- ▷ I milieu de [MD] (D symétrique de M par rapport à I)
- ▷ J milieu de [ME] (E symétrique de M par rapport à J)

donc, d'après le théorème des milieux, (IJ) || (BC)

▶ Conclusion :

(IJ) || (BC) et (IJ) || (BC)
donc (BC) || (DE)