THEME :

TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE _ CORRECTION 1

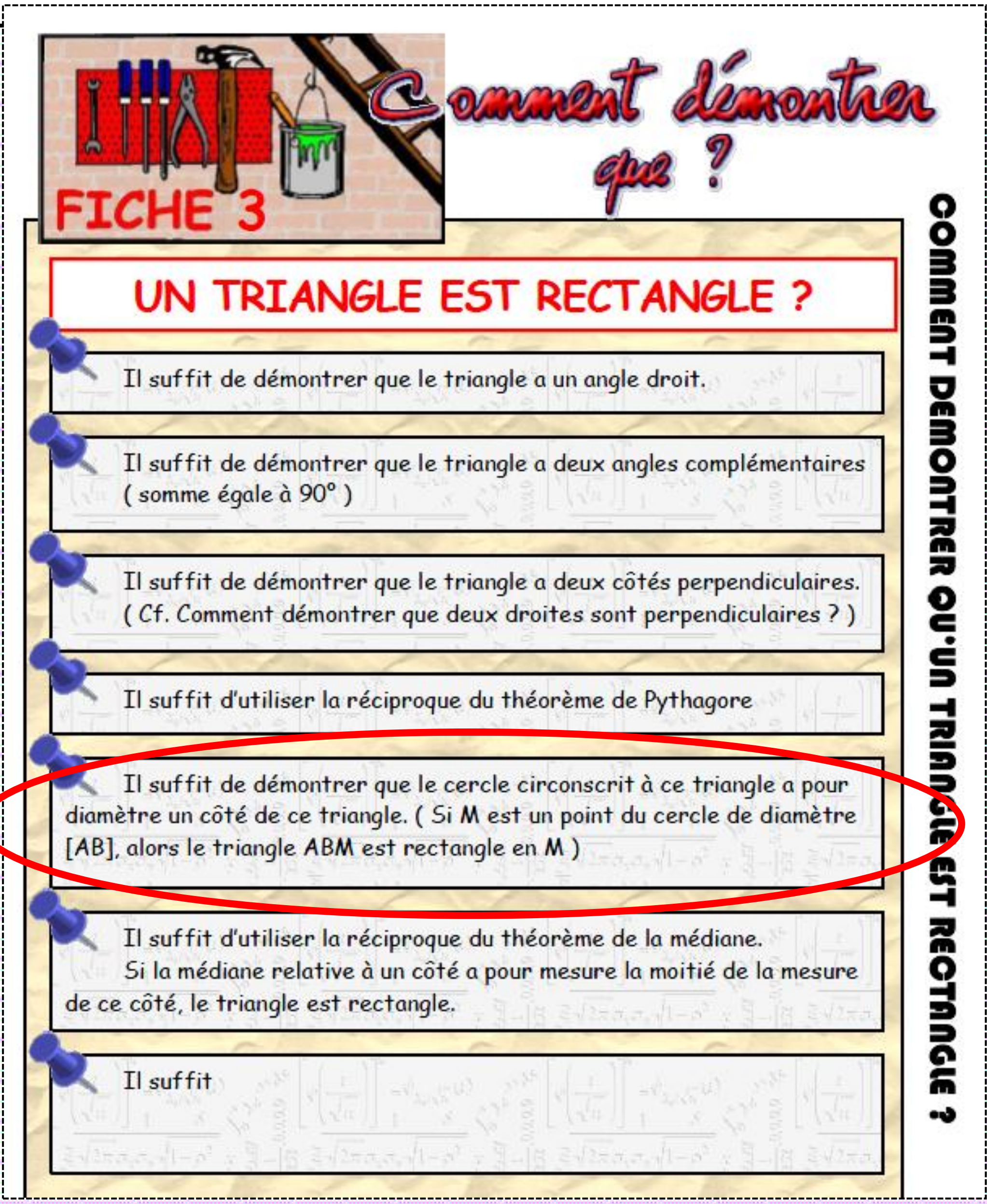
Exercice 1 : Brevet des Collèges – Groupe Est - 2005

Tracer un segment [EF] de 10 cm de longueur puis un demi-cercle de diamètre [EF].
Placer le point G sur ce demi-cercle, tel que EG = 9 cm.
a. Démontrer que le triangle EFG est rectangle.
b. Calculer la longueur GF arrondie au mm.

Solution :

a) Nature du triangle EFG :

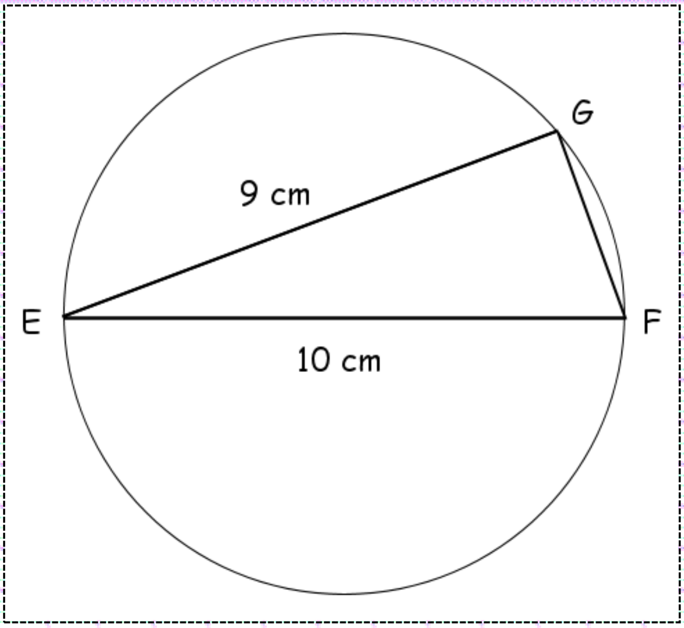
Comment démontrer qu'un triangle est rectangle ?



Nous pourrions écrire une phrase du genre :

Le triangle EFG est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un côté du triangle, donc ce triangle est rectangle.

(Attention , nous ne pouvons pas écrire une phrase du genre : « *le triangle EFG est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse du triangle* » puisque nous ignorons encore que ce triangle est… rectangle !)



Il est préférable (et plus simple) d'écrire :

G est un point du cercle de diamètre [EF], donc le triangle EFG est rectangle en G.

b) Calcul de GF :

Dans le triangle EFG rectangle en G (question précédente),
nous avons, d'après le théorème de Pythagore :

$EF^2 = EG^2 + GF^2$

$10^2 = 9^2 + GF^2$

$100 = 81 + GF^2$

$100 - 81 = GF^2$

soit $GF^2 = 19$

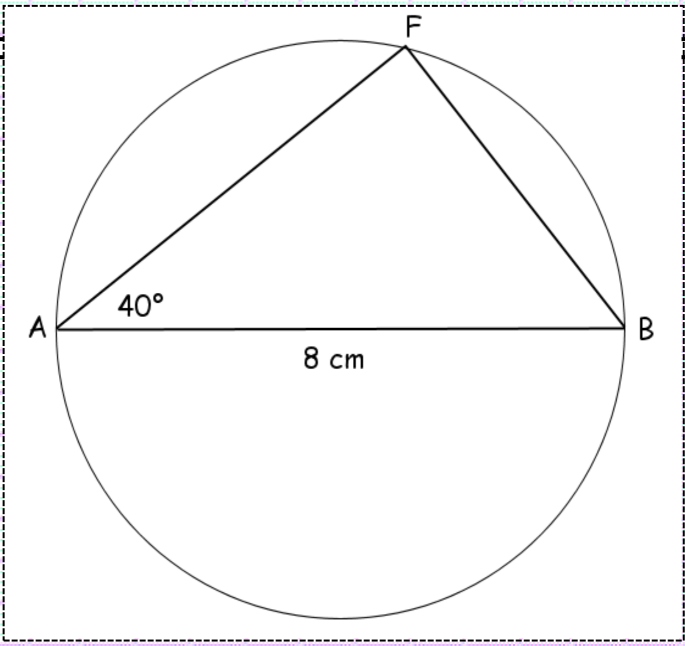
et par suite $GF = \sqrt{19} \approx 4{,}35$ soit $4{,}4$ cm (arrondi au mm)

Exercice 6 : Brevet des Collèges - Antilles-Guyane - Septembre 2008

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre AB = 8 cm, puis placer un point F sur le cercle tel que l'angle $\widehat{BAF}$ soit égal à 60°.
2. Montrer que le triangle ABF est rectangle en F.
3. Calculer AF.

Solution :

1) Tracé de la figure :



2) Nature du triangle ABF :

F est un point du cercle de diamètre [AB] , donc le triangle ABF est rectangle en F.

3) Calcul de AF :

Dans le triangle ABF rectangle en F , nous avons :

$$\cos(\widehat{BAF}) = \frac{AF}{AB}$$

$$\cos(40°) = \frac{AF}{8}$$

$$8 \times \cos(40°) = AF \qquad AF = 8 \times \cos(40°) \approx 6{,}1 \text{ cm}$$

Exercice 3 : D'après Brevet des Collèges - Antilles-Guyane - Juin 2009

JKL est un triangle tel que :

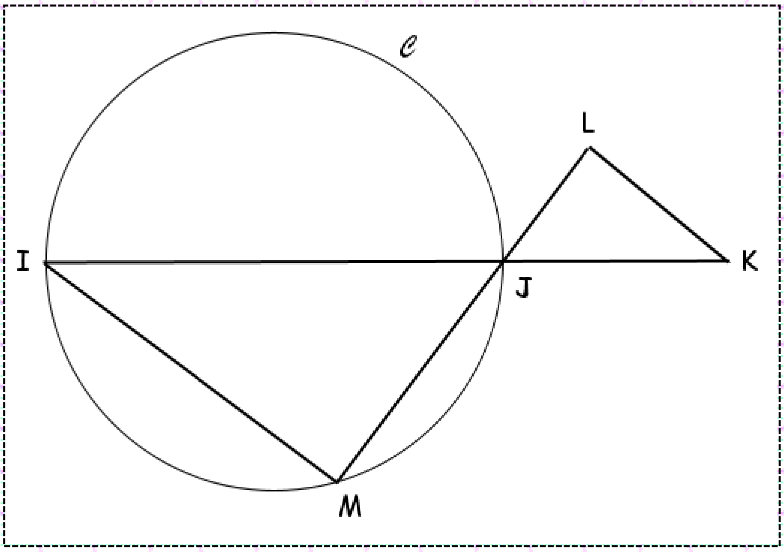
JK = 6 cm ; JL = 3,6 cm et KL = 4,8 cm.

J est un point du segment [IK] et IJ = 9 cm.

$\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [IJ].

La droite (JL) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M.

La figure n'est pas en vraie grandeur et il n'est pas demandé de la reproduire.



1. Démontrer que le triangle JKL est rectangle.
2. Démontrer que les droites (LK) et (IM) sont parallèles (*Aide : Quelle est la nature du triangle IJM ?*)

Solution :

1) Nature du triangle JKL :

$$JK^2 = 6^2 = 36$$

$$LJ^2 + LK^2 = 3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36$$

donc $LJ^2 + LK^2 = JK^2$

donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle JKL est rectangle en L

2) Positions relatives des droites (LK) et (IM) :

Nous disposons de plusieurs « outils » pour démontrer que deux droites sont parallèles.

Premier outil : Démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même troisième.

En regardant le dessin, il n'existe pas une droite (évidente) qui aurait cette propriété. Laissons donc cet outil de côté.

Deuxième outil : Démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires à une même troisième.

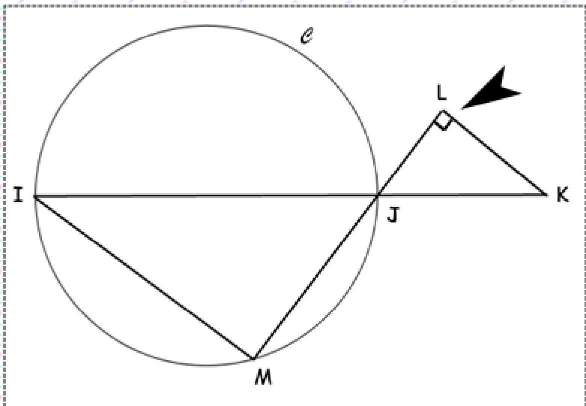
Comment démontrer que ?

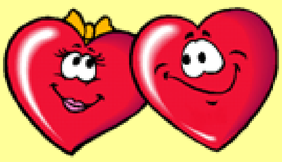
DEUX DROITES SONT PARALLELES

- Il suffit de démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même troisième.
- Il suffit de démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires à une même troisième.
- Il suffit de démontrer que ces deux droites sont les supports des côtés opposés d'un parallélogramme.
- Il suffit de démontrer que l'une des droites est l'image de l'autre dans une symétrie centrale.
- Il suffit de démontrer que, s'il existe une sécante, deux angles en position d'angles alternes-internes (ou d'angles correspondants) ont même valeur.
- Il suffit d'utiliser, dans un triangle, l'énoncé des milieux.
- Il suffit d'utiliser la conservation du parallélisme par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation ou une rotation. Si deux droites sont parallèles, les images de ces deux droites par une symétrie axiale, ou une symétrie centrale ou une translation, ou une rotation, sont deux droites parallèles.

COMMENT DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES ?

Nous venons de démontrer que le triangle JKL est rectangle en L (donc les droites (LK) et (LM) sont perpendiculaires.
Si nous pouvions démontrer que les droites (IM) et (LM) étaient perpendiculaires, nous aurions la solution !



TRIANGLE RECTANGLE  **(DEMI) CERCLE**

La rédaction est donc la suivante :

▷ M est un point du cercle de diamètre [IJ] donc le triangle IJM est rectangle en M.
▷ (LK) $\perp$ (LJ)   (IJK est un triangle rectangle en L - question précédente)
donc (LK) $\perp$ (LM)
▷ (IM) $\perp$ (MJ) (IJM est rectangle en M – voir ci-dessus)
donc (IM) $\perp$ (LM)
▷ (LK) $\perp$ (LM)   et (IM) $\perp$ (LM)   donc (LK) // (IM)

Les droites (LK) et (IM) sont parallèles.

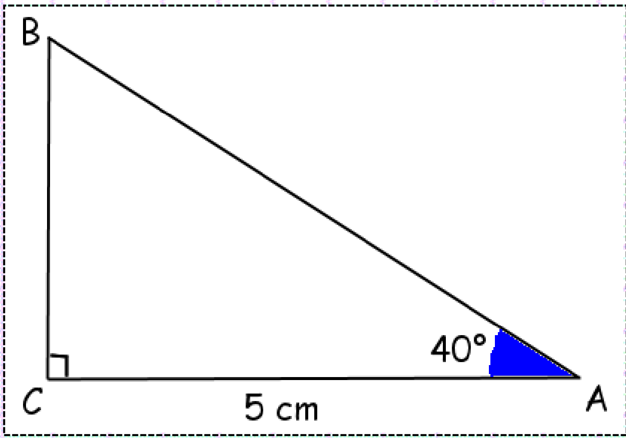
Exercice 5 : Brevet des Collèges – Groupe Sud - 2006

1. Construire un triangle ABC rectangle en C tel que AC = 5 cm et $\widehat{BAC}$ = 40°.
2. Calculer la longueur BC. (On donnera une valeur arrondie au millimètre).
3. a) Où se trouve le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC ? Justifier.
   b) Tracer ce cercle.
4.) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

Solution :

1) Construction :

La construction est laissée au soin du lecteur.



2) Calcul de la longueur BC :

▷ Calcul de AB :

Dans le triangle ABC rectangle en C, nous avons :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(40^\circ) = \frac{5}{AB}$$

par suite : $AB \times \cos(40^\circ) = 5$

et donc : $AB = \dfrac{5}{\cos(40^\circ)} \approx 6{,}53\,(cm)$

▷ Calcul de l'angle $\widehat{ABC}$:

Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. Donc :

$$\widehat{ABC} = 90 - \widehat{BAC} = 90 - 40 = 50^\circ$$

▷ Calcul de la longueur BC :

Dans le triangle ABC rectangle en C, nous avons :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{CB}{AB}$$

$$\cos(50^\circ) = \frac{CB}{6{,}53}$$ et par suite $6{,}53 \times \cos(50^\circ) = CB$

Il est cependant préférable d'écrire :

$$\cos(50^\circ) = \frac{CB}{\frac{5}{\cos(40^\circ)}}$$

et par suite : $\dfrac{5}{\cos(40^\circ)} \times \cos(50^\circ) = CB$

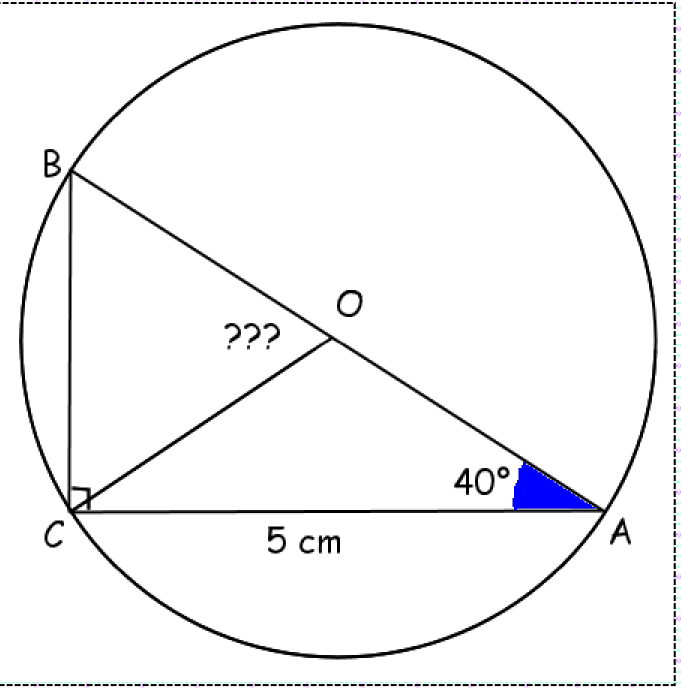
que nous pouvons également écrire :

$$CB = \frac{5}{\cos(40^\circ)} \times \frac{\cos(50^\circ)}{1} = \frac{5 \times \cos(50^\circ)}{\cos(40^\circ)} \approx 4{,}19\,(cm) \text{ soit } 4{,}2\,(cm)$$

2) Cercle circonscrit au triangle ABC :

ABC est un triangle rectangle en C, donc le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle de diamètre [AB] et de centre le milieu de [AB]

O est le milieu de [AB] .



3) Calcul de l'angle $\widehat{BOC}$:

Remarque : En classe de Troisième, une notion appelée « Angle au centre – Angle inscrit » permet de répondre immédiatement à la question.

A et C sont des points du cercle de centre O, donc

$OC = OA$

Le triangle OAC est donc isocèle en O.

Par suite, les angles à la base $\widehat{OAC}$ et $\widehat{OCA}$ ont même mesure.

$\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 40^\circ$

▷ Calcul de $\widehat{COA}$:

Dans le triangle OAC, la somme des angles est égale à 180°

donc : $\widehat{COA} = 180 - (\widehat{OCA} + \widehat{OAC}) = 180 - (40 + 40) = 180 - 80 = 100^\circ$

▷ Calcul de $\widehat{BOC}$:

Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ sont supplémentaires (la somme des angles est égale à 180° - angle plat)

donc $\widehat{BOC} = 180 - \widehat{COA} = 180 - 100 = 80^\circ$

$\widehat{BOC} = 80^\circ$

Exercice 10 :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de diamètre [AB] . Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre [OA] .

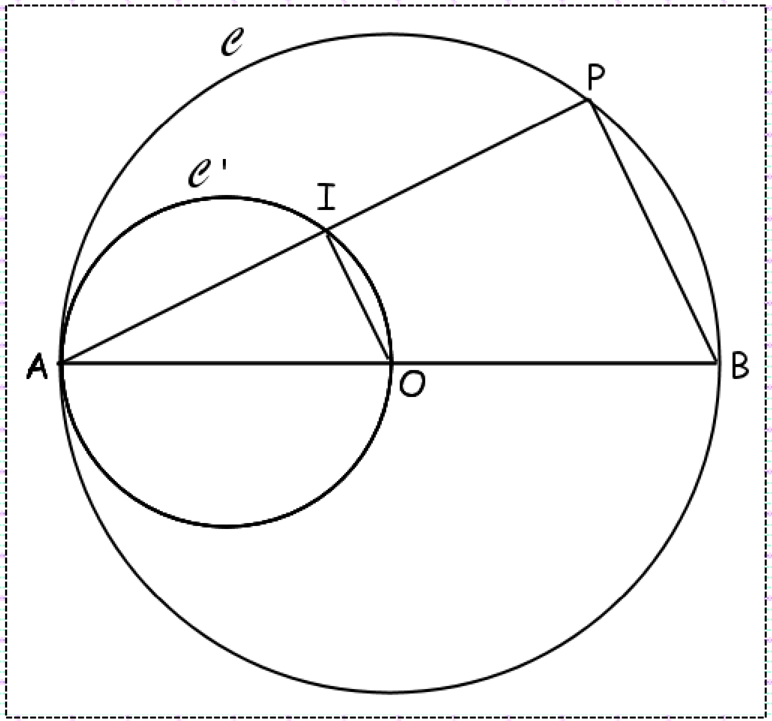
Soit P un point du cercle $\mathcal{C}$. La droite (AP) coupe $\mathcal{C}'$ en I.

1. Démontrer que les droites (OI) et (BP) sont parallèles.
2. En déduire que le point I est le milieu de [AP].

Solution :

1) Positions relatives des droites (OI) et (BP) :

Comment démontrer que deux droites sont parallèles ? (voir la correction du Brevet des Collèges - Antilles-Guyane - Juin 2009)



Si nous démontrons que les deux droites (OI) et (BP) sont perpendiculaires à la droite (AP), nous aurons répondu à la question.

▷ Nature du triangle APB :
P est un point du cercle de diamètre [AB] , donc les triangle APB est rectangle en P.

▷ Nature du triangle AIO :
I est un point du cercle de diamètre [AO] , donc les triangle AIO est rectangle en I.

▷ Positions des deux droites (OI) et (BP) :
(OI) ⊥ (AI) (AIO est rectangle en I)
donc (OI) ⊥ (AP)
(BP) ⊥ (AP) (APB est rectangle en P)

(OI) ⊥ (AP) et (BP) ⊥ (AP)
donc (OI) // (BP)

Les droites (OI) et (BP) sont parallèles.

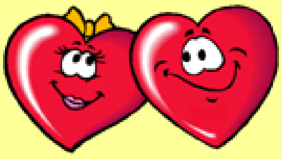
2) I milieu de [AP] :
Comment démontrer ceci ? Quelle notion peut nous apporter une solution ?
Les mots importants sont « milieu » et « parallèle(s) » . Rappelons que nous venons de démontrer à la question précédente que deux droites étaient parallèles. La leçon « Milieux et parallèles dans un triangle » peut être la solution (théorème des milieux et réciproque du théorème des milieux)

▷ Dans le triangle APB,
O milieu de [AB] ([AB] est un diamètre du cercle de centre O)
(OI) // (BP) (question précédente)
Donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, le point I (I appartient à (AP)) est milieu de [AP].

I milieu de [AP]

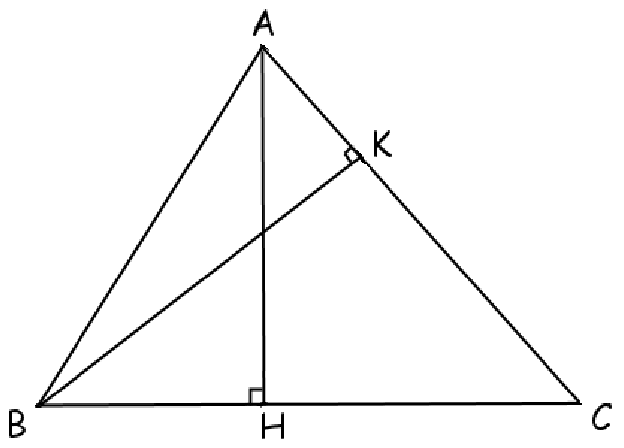
Exercice 11 :
Soit ABC un triangle. Soient H et K les pieds des hauteurs issues de A et de B.
Démontrer que les points A, B, H et K sont sur un même cercle, et préciser son centre.

Solution :

TRIANGLE RECTANGLE  (DEMI) CERCLE

▷ Nature du triangle ABH :

Dans le triangle ABC, (AH) est la hauteur issue de A .
Donc le triangle ABH est rectangle en H.
Donc le triangle ABH est inscrit dans le cercle de diamètre [AB].
Donc les points A, B et H sont sur le cercle de diamètre [AB].



▷ Nature du triangle ABK :

Dans le triangle ABC, (BK) est la hauteur issue de B .
Donc le triangle ABK est rectangle en K.
Donc le triangle ABK est inscrit dans le cercle de diamètre [AB].
Donc les points A, B et K sont sur le cercle de diamètre [AB].

▷ Conclusion :

Les points A, B , H et K sont sur le cercle de diamètre [AB] de centre le milieu de [AB}