

THEME :

TRIGONOMETRIE

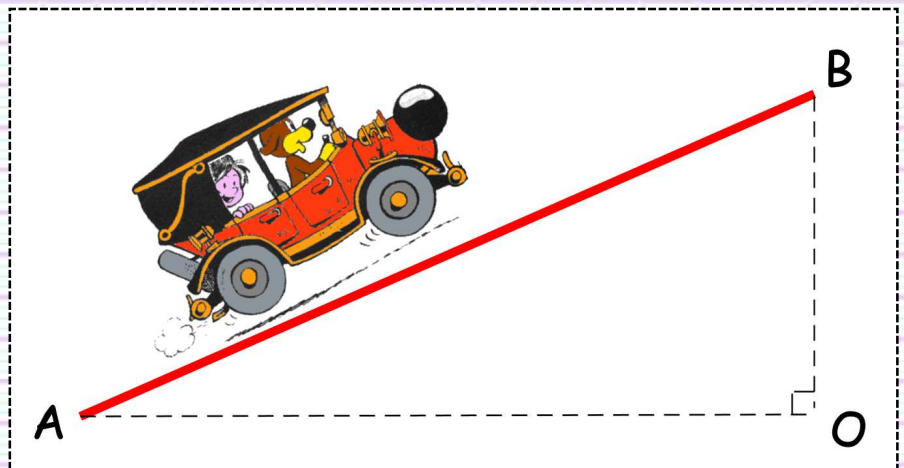
PENTE D'UNE ROUTE



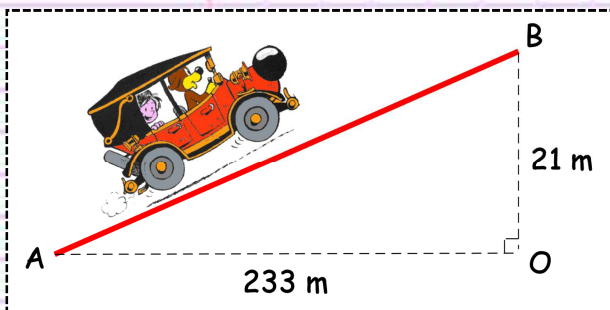
Définition :

Exprimée en pourcents, la pente (d'une route) est le rapport de la hauteur (différence de la hauteur maximale et de la hauteur minimale) par la distance horizontale parcourue.

La pente d'une route est égale au rapport $\frac{OB}{OA}$ exprimé en pourcents.



Exemple : Pour une distance horizontale OA de 233 mètres, le dénivelé (différence d'altitude entre A et B) OB est de 21 m. Quelle est la pente de la route ?



La pente de cette route est :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{21}{233} \approx 0,090$$

Soit une pente égale à 0,090, pente que nous représenterons par le pourcentage 9 %

Nous constatons que ce rapport $\frac{OB}{OA}$ est égal (environ) à 0,09, soit $\frac{9}{100}$

Ce qui permet d'avoir une idée de la pente. Pour tout déplacement horizontal de 100 mètres, la route "monte" (ou "descend" !!!!) de 9 mètres.

Remarque :

La pente, exprimée en pourcents, représente le dénivelé ("hauteur") d'une route (ou d'un terrain , ou d'un toit) pour un déplacement horizontal de 100 m.

Si la pente est de 5% , la route s'élève de 5 mètres pour un déplacement horizontal de 100 mètres.

Exemple :

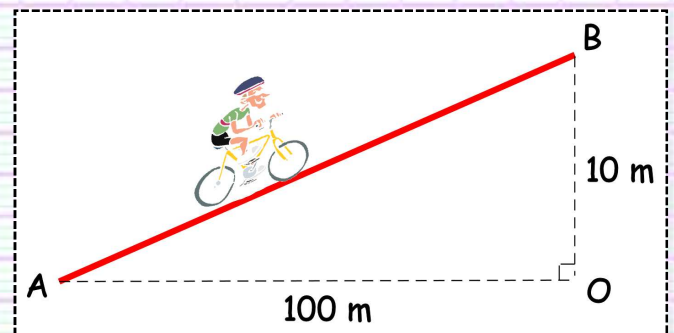
Le panneau de signalisation ci-contre (la pente est souvent précisée sur les routes pentues, principalement en montagne) mentionne une pente de 10% (valeur arrondie et moyenne)

Cette valeur permet d'avoir une idée de la difficulté que les participants au Tour de France (mais surtout les simples amateurs de la petite reine) rencontreront dans la suite de leur périple !!!

La pente est de 10% . En appelant p cette pente, nous avons :

$$p = 0,10 = \frac{10}{100}$$

Pour tout déplacement horizontal de 100 m, la montée sera de 10 m.



Remarque :

La pente est une moyenne. Il suffit de monter certaines côtes pour s'apercevoir que la pente n'est pas constante.

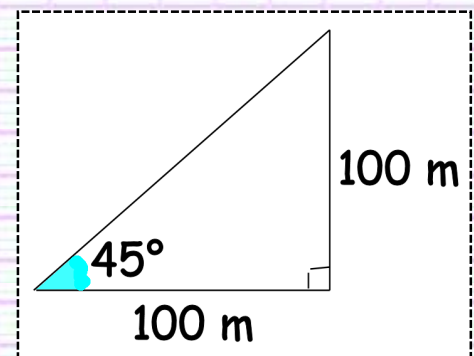
Remarque : Pente de 100 %

Une pente de 100% correspond à différence d'altitude de 100 mètres (montée de 100 mètres) pour un déplacement horizontal de 100 mètres.

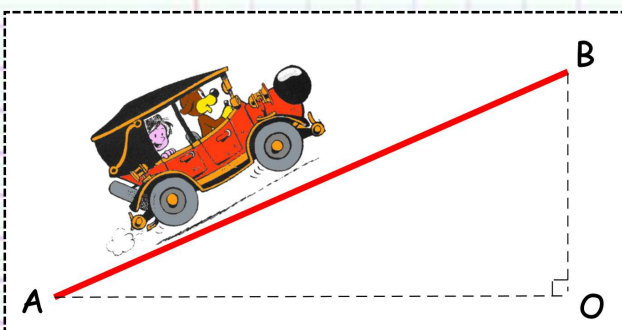
Le triangle ainsi formé est un triangle rectangle isocèle. L'angle que forme la route avec l'horizontale est donc, non pas de 90° , mais de 45° .

Si l'angle est supérieur à 45° , la pente est supérieure à 100% .

Ce qui est "rare" sur nos routes. La pente d'un mur vertical n'existe pas (sa valeur serait infinie) !!!



Autre définition de la pente d'une route :



La pente est le rapport $\frac{OB}{OA}$. Ce rapport est la tangente de l'angle $O\hat{A}B$.

La pente d'une route est la tangente de l'angle formé par la route et l'horizontale.

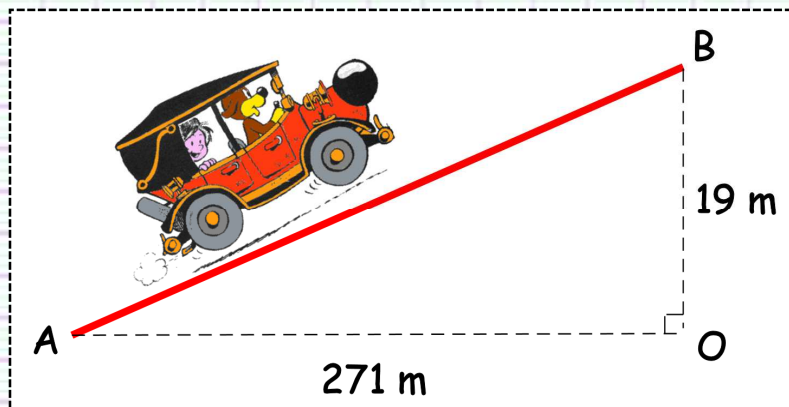
Exemple 1 :

Quelle est la pente de cette route (dessin ci-contre) ?

Dans le triangle AOB rectangle en O

$$\tan (O\hat{A}B) = \frac{OB}{OA}$$

$$\tan (O\hat{A}B) = \frac{19}{271} \approx 0,070$$



La pente de la route est donc d'environ 7 % ($0,07 = \frac{7}{100}$)

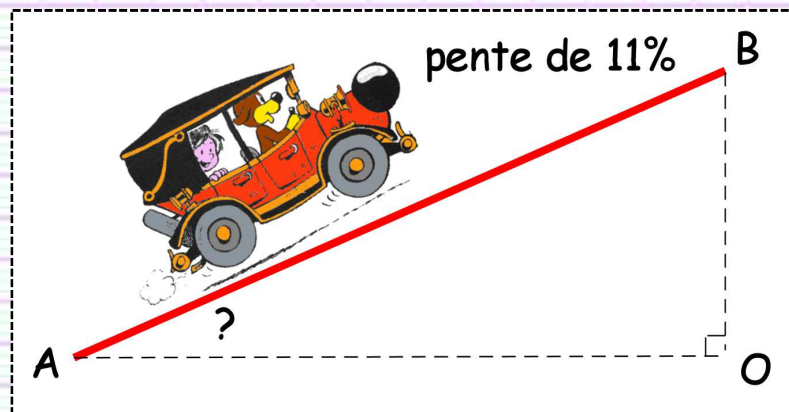
Exemple 2 :

Quel est l'angle formé avec l'horizontale par une route dont la pente est 11% (au dixième) ?

Si la pente est de 11 % ($\frac{11}{100}$), alors la tangente de l'angle $O\hat{A}B$ est égale à 0,11

$$\tan (O\hat{A}B) = 0,11$$

donc $O\hat{A}B \approx 6,3^\circ$ ($\tan^{-1} 0 \cdot 11$)



Remarque :

Dessinez un angle d'environ 6° et vous verrez que la pente est apparemment ridicule !!!

Remarque :

Si l'élévation (la distance OB) est assez simple à évaluer, il n'en est pas de même de la distance horizontale OA .

C'est pourquoi certains utilisent, à tort, le sinus de l'angle $O\hat{A}B$. (le sinus utilisant les distances OB et AB, AB étant très facile à mesurer)

Nous avons déterminé la valeur de l'angle $O\hat{A}B$ correspondant à une pente de 11% . Les pentes de nos routes n'excédant pas 15%, l'angle $O\hat{A}B$ ne dépasse pas la valeur de $8,5^\circ$ ($\tan^{-1} 0 \cdot 15 \approx 8 \cdot 5$)

A	B	C
Valeur de l'angle	Sinus	Tangente
0	0	0
1	0,0175	0,0175
2	0,0349	0,0349
3	0,0523	0,0524
4	0,0698	0,0699
5	0,0872	0,0875
6	0,1045	0,1051
7	0,1219	0,1228
8	0,1392	0,1405
9	0,1564	0,1584
10	0,1736	0,1763

Si nous regardons les valeurs de sinus et tangente pour des petits angles (valeurs qui nous intéressent pour des pentes de route), nous constatons que ces valeurs sont, au centième ou au millième, pratiquement égales.

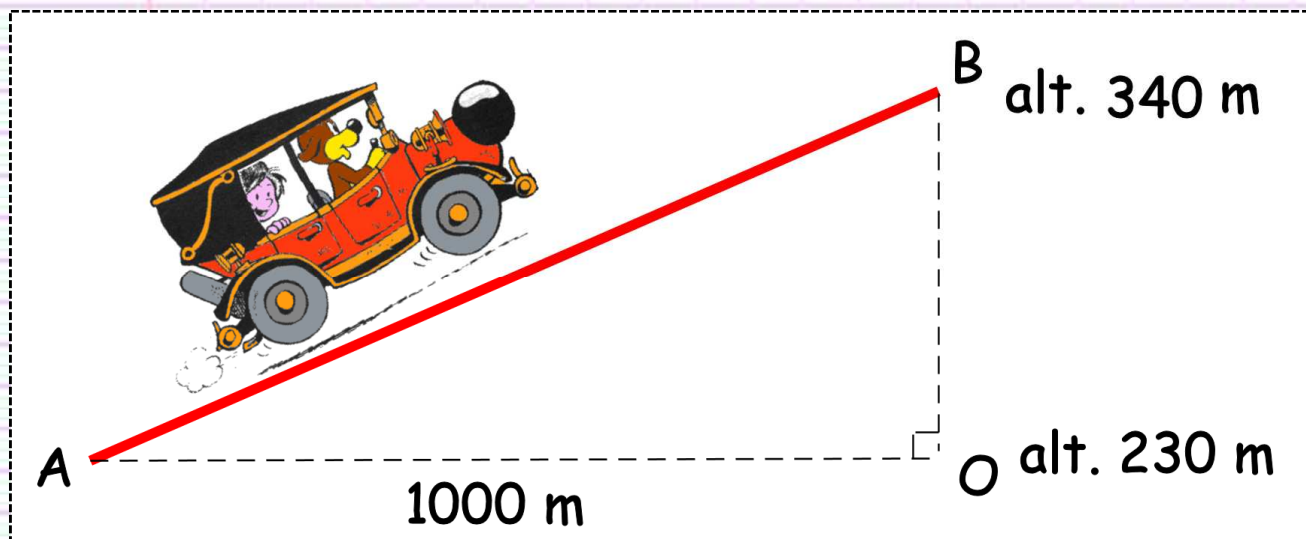
C'est pourquoi la confusion n'entraîne pas, pour ces petits angles, d'erreurs importantes !

Remarque :

Le sinus de l'angle fait entre l'horizontale et la route s'appelle, non pas la pente, mais la déclivité.
Si la pente peut prendre toute valeur, la déclivité ne peut pas dépasser, en pourcents, 100% (le sinus d'un angle étant inférieur à 1) (source : <http://fr.wiktionary.org>).

Exercice :

En parcourant horizontalement 1 km, nous passons de l'altitude 230 m à l'altitude 340 m.
Quelle est la pente (moyenne) de cette route . (Arrondir au dixième)



La distance OB est égale à la différence des altitudes, soit

$$OB = 340 - 230 = 110 \text{ (m)}$$

La pente est la tangente de l'angle $O\hat{A}B$, donc (en appelant p la pente de cette route)

$$p = \tan(O\hat{A}B) = \frac{OB}{OA} = \frac{110}{1000} = 0,11 \quad \left(0,11 = \frac{11}{100} \right)$$

La pente de la route est donc de 11%

