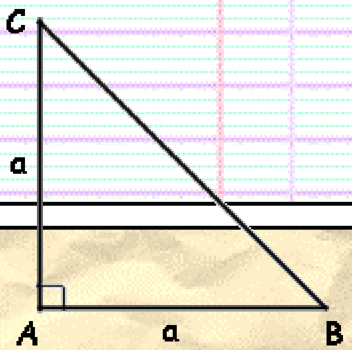
THEME 8

TRIGONOMETRIE ET ANGLES PARTICULIERS

En Mathématiques, certains angles apparaissent plus souvent que d'autres. L'angle droit (90°) est souvent utilisé. Il en est de même des angles de 30° , 45° et 60°.
L'emploi de ces angles fait intervenir, dans les calculs, le cosinus, le sinus et la tangente de ces valeurs.
La calculatrice nous permet d'obtenir des valeurs approchées de cos 30° , cos 45° , cos 60° , sin 30° , sin 45° , sin 60° , tan 30° , tan 45° ou tan 60° , mais existe-t-il des valeurs exactes simples ?

Calcul de cos 45° , sin 45° et tan 45° :

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que AB = a .



a)Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.
b)Montrer que BC = $a\sqrt{2}$
c)Calculer la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.
d)Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

Remarque :
Lorsqu'en Mathématiques, un résultat apparaît avec un radical au dénominateur, nous essayons de le supprimer. Cette opération s'appelle : « rendre rationnel le dénominateur ».

Considérons, par exemple, le nombre $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Cette écriture fait apparaître un radical (une racine carrée) au dénominateur. Pour la supprimer, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{3}$. Nous obtenons :

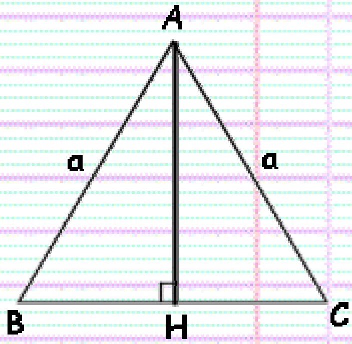
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Le résultat final apparaît sans radical au dénominateur.

e)En procédant comme dans la remarque précédente, vérifier que sin 45° = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Calcul de cos 30°, sin 30° , tan 30° , cos 60° , sin 60° et tan 60°:

Soit ABC un triangle équilatéral Soit a la mesure d'un côté.
Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A.
a)Déterminer les valeurs des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAH}$.



b)Montrer que BH = HC = $\frac{a}{2}$.

c)En utilisant le théorème de Pythagore dans la triangle ABH rectangle en H, démontrer que AH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

d)Calculer alors le sinus des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAH}$, les cosinus des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAH}$ et les tangentes des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAH}$.

Si besoin , rendre rationnel les dénominateurs de certains résultats (Cf. remarque précédente).

Récapitulation :

Compléter le tableau ci-dessous :

Remarque :

Les sinus , cosinus et tangentes des angles de 0° et de 90° ne sont pas définis au Collège (ces angles ne sont pas des angles aigus). Vous utiliserez votre calculatrice pour vérifier les valeurs données dans le tableau.

Angle (en degrés)	0	30	45	60	90
Sinus	0				1
Cosinus	1				0
Tangente	0				

Remarque :

Il est bon de connaître parfaitement les valeurs de ce tableau à partir de la classe de Seconde.
Il existe un moyen rapide de retrouver facilement les valeurs du sinus et du cosinus de ces angles particuliers.
On remplit la ligne du sinus avec les nombres entiers consécutifs 0 , 1 , 2 , 3 et 4.
On procède de la même façon pour la ligne cosinus, mais à l'envers.

Angle (en degrés)	0	30	45	60	90
Sinus	0	1	2	3	4
Cosinus	4	3	2	1	0

Puis on prend les racines carrées de ces nombres .

Angle (en degrés)	0	30	45	60	90
Sinus	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
Cosinus	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$

Soit en simplifiant :

Angle (en degrés)	0	30	45	60	90
Sinus	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
Cosinus	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

On divise par 2 tous ces nombres.

Angle (en degrés)	0	30	45	60	90
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Nous venons de retrouver les valeurs du tableau.

Pour la tangente, il suffit d'apprendre la dernière ligne ou d'utiliser la formule $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Supplément :

Vérifier pour les différentes valeurs 30°, 45° et 60° que : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ et que le sinus d'un angle est égal au cosinus de son angle complémentaire.

Lien entre cos 2α et cos² α .

On considère un « demi-cercle » de diamètre [AB] , de centre O et <u>de rayon 1</u>.

a)Montrer que $\cos\alpha = \frac{AH}{AC}$.

b)Montrer que $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$.

c)Calculer $\cos\beta$ (Utiliser le triangle OHC) .

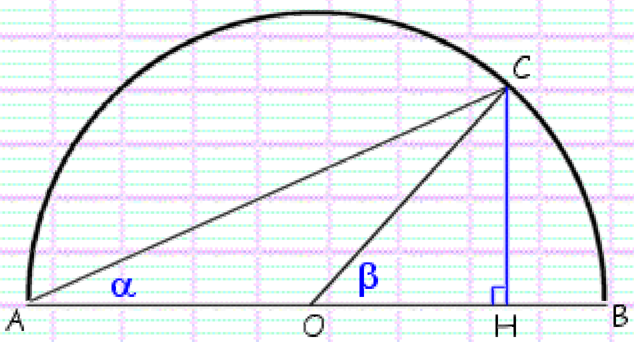
En déduire que $AH = 1 + \cos\beta$

d)En utilisant les trois résultats précédents, montrer que

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos\beta}{2}$

e)Comparer les angles α et β .

En déduire que $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$



f)Application :

Sachant que $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, montrer que $\cos^2 15° = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.